— Semaine du lundi 15 janvier au vendredi 19 janvier —

Suites et comparaison des suites

Programme de la semaine de colle

Suites

Même programme que la semaine dernière.

Comparaison des suites

- Suites équivalentes. Notation : $u_n \sim v_n$
- Quatre équivalents classiques : Si $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ alors
  - ▷ $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - ▷ $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - ▷ $\exp(\varepsilon_n) - 1 \sim \varepsilon_n$
  - ▷ $\sqrt{1+\varepsilon_n} \sim \frac{1}{2} \times \varepsilon_n$
- Formule de Stirling
- Suites négligeables (notation : $u_n = \mathsf{o}(v_n)$)
- Comparaisons classiques :
  - ▷ $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall a > 1,\ n^\alpha = \mathsf{o}(a^n)$
  - ▷ $\forall a > 0,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$
  - ▷ *etc.*
- Suites dominées
  Notation : $u_n = \mathsf{O}(u_n)$

Note pour les colleurs
Les développements limités n'ont pas été vus.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de ln, exp et sin
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Définition de « A est dense dans $\mathbb{R}$ »
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \geqslant \Big||z| - |z'|\Big|$
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- Inégalité de Jensen
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$
- Présentation de la partie entière
- I convexe $\implies$ I intervalle : démonstration d'un des neuf cas.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}\ ;\ a_n \longrightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \longrightarrow \mathsf{sup}(A)$.
- Contre-exemples pour :
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \mathsf{exp}(u_n) \sim \mathsf{exp}(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies (u_n)^n \sim (v_n)^n$
- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow$? par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$