— Semaine du lundi 29 janvier au vendredi 2 février —

Matrices (et un peu d'espaces vectoriels)

Colle n° 16

La colle pourra commencer par le calcul du noyau d'une matrice de taille 3 ou 4 ou par le calcul de l'inverse d'une matrice et/ou par une question de cours.

Matrices

Même programme que la semaine précédente ainsi que :

- Inversibilité et inverse des matrices triangulaires supérieures : preuves :
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices d'opération élémentaire

Espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; ou K corps quelconque) ; sous-espaces vectoriels
- Identification de $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On note $\underline{\mathbb{K}}^n \coloneqq \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Familles liées, libres, génératrices, bases.
- Familles de $\underline{\mathbb{K}}^n$: liées si de taille trop grande, non génératrices si de taille trop petite.
- Intersection d'espaces vectoriels, somme de deux espaces, somme de p espaces

Note pour les colleurs
Les applications linéaires n'ont pas encore été vues.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Définition de « A est dense dans $\mathbb{R}$ »
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure
- Formule donnant AB quand $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
- Formule donnant AX quand $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} = ?$

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \geqslant \Big||z| - |z'|\Big|$
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- Inégalité de Jensen
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$
- Présentation de la partie entière
- I convexe $\implies$ I intervalle : démonstration d'un des neuf cas.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}\ ;\ a_n \longrightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \longrightarrow \mathsf{sup}(A)$.
- Contre-exemples pour :
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \mathsf{exp}(u_n) \sim \mathsf{exp}(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies (u_n)^n \sim (v_n)^n$
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow$? par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} =?$
- $\mathsf{tr}(AB) = \mathsf{tr}(BA)$
- A inversible $\implies \mathsf{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
- $A \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $B \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \implies AB \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$
- Inversibilité et inverse des matrices triangulaires supérieures : preuves
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices d'opération élémentaire