— Semaine du lundi 5 février au vendredi 9 février —

Matrices et applications linéaires (début)

Colle n° 17

Matrices

Même programme que les semaines précédentes.

Espaces vectoriels

Même programme que la semaine précédente ainsi que :

- Espaces en somme directe ; supplémentaire d'un espace.
- Sommes directes à p facteurs
- Espace vectoriel engendré par une partie. Notation : $\mathsf{Vect}(A)$
- Sous-espaces affines

Applications linéaires

- Applications linéaires, endomorphismes, formes linéaires. Notations : $\mathrm{L}(E, F)$, $\mathrm{L}(E)$.
- Notation : $\underline{\mathbb{K}}^n \coloneqq \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée

$$\mathsf{u}_A : \begin{cases} \underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n \\ X \longmapsto AX. \end{cases}$$

- Classifications de $\mathrm{L}(\mathbb{R})$, $\mathrm{L}\big(\underline{\mathbb{R}}^2, \mathbb{R}\big)$, $\mathrm{L}\big(\underline{\mathbb{R}}^2\big)$, $\mathrm{L}(\underline{\mathbb{R}}^p, \underline{\mathbb{R}}^n)$
- $\mathrm{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre
- $\mathrm{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; composition des applications linéaires ; diagrammes.
- Formules de Newton et Bernoulli
- Noyau $\mathsf{Ker}(f)$ d'une application linéaire.
- f injective $\iff$ $\mathsf{Ker}(f) = \{0_E\}$
- Image $\mathsf{Im}(f)$ d'une application linéaire.
- Isomorphismes, $\mathrm{GL}(E)$; espaces isomorphes (notation $E \simeq F$)

Note pour les colleurs
Les projecteurs et les symétries n'ont pas encore été vus, ni la théorie de la dimension !

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de ln, exp et sin
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Définition de « A est dense dans $\mathbb{R}$ »
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure
- Formule donnant AB quand $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
- Formule donnant AX quand $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} = ?$

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \geqslant \Big||z|-|z'|\Big|$
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- Inégalité de Jensen
- $X^n - 1 = \prod\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$
- Présentation de la partie entière
- I convexe $\implies$ I intervalle : démonstration d'un des neuf cas.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}\ ;\ a_n \longrightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \longrightarrow \mathsf{sup}(A)$.
- Contre-exemples pour :
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \mathsf{exp}(u_n) \sim \mathsf{exp}(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies (u_n)^n \sim (v_n)^n$
- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow$? par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} = ?$
- $\mathsf{tr}(AB) = \mathsf{tr}(BA)$
- A inversible $\implies \mathsf{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
- $A \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $B \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \implies AB \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$
- Inversibilité et inverse des matrices triangulaires supérieures : preuves
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices d'opération élémentaire
- $f \in \mathrm{L}(E,F)$ injective $\iff \mathsf{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathrm{L}(E,F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$

- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathsf{u}_A \in \mathrm{GL}(\underline{\mathbb{K}}^n)$
- $\mathsf{Im}(g \circ f) = \cdots$?