— Semaine du lundi 12 février au vendredi 16 février —

Algèbre linéaire générale (*ie* sans dimension)

Colle n° 18

Matrices

Même programme que les semaines précédentes.

Espaces vectoriels

Même programme que les semaines précédentes.

Applications linéaires

Même programme que la semaine précédente ainsi que :

- On définit une application linéaire en la définissant sur une base.
- On définit une application linéaire en la définissant sur les facteurs d'une somme directe.
- Quand $E = F \oplus G$:
  - ⊛ projecteur de E sur F parallèlement à G
  - ⊛ symétrie de E par rapport à F parallèlement à G
- Propriétés des projecteurs et symétries
- $p \in \mathrm{L}(E)$ est un projecteur ssi $p^2 = p$
- $s \in \mathrm{L}(E)$ est une symétrie ssi $s^2 = \mathsf{Id}_E$
- Hyperplans et formes linéaires

Note pour les colleurs
La théorie de la dimension n'ont pas encore été vue !

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de ln, exp et sin
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Définition de « A est dense dans $\mathbb{R}$ »
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Formule donnant AB quand $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
- Formule donnant AX quand $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} =?$
- Résultats autour des hyperplans

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \geqslant \Big||z| - |z'|\Big|$
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- Inégalité de Jensen
- Contre-exemples pour :
  - $\triangleright\ u_n \sim v_n \implies \mathsf{exp}(u_n) \sim \mathsf{exp}(v_n)$
  - $\triangleright\ u_n \sim v_n \implies \mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
  - $\triangleright\ u_n \sim v_n \implies (u_n)^n \sim (v_n)^n$
- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow ?$ par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
- A inversible $\implies \mathsf{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
- $A \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $B \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \implies AB \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$
- $f \in \mathrm{L}(E,F)$ injective $\iff \mathsf{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathrm{L}(E,F)$. Alors,

$$f \text{ injectif } \iff \big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$

- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathsf{u}_A \in \mathrm{GL}(\underline{\mathbb{K}}^n)$
- $\mathsf{Im}(g \circ f) = \cdots ?$
- Présentation des projecteurs : définition, dessin, propriétés, preuves
- Présentation des symétries : définition, dessin, propriétés, preuves
- On peut définir une application linéaire « par décret » sur une base : explication, énoncé précis et preuves