— Semaine du lundi 19 février au vendredi 23 février —

Limites, continuité

Colle n° 19

Limites des fonctions

- Cas où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
- Cas où $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$
- Règles usuelles
- Caractérisation séquentielle de $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

Relations de comparaison : équivalence, négligeabilité, domination

- $f \sim_a g$
- $f = \underset{a}{\mathsf{o}}(g)$
- $f = \underset{a}{\mathsf{O}}(g)$
- Croissances comparées
- On a, quand $x \to 0$, les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &\sim x \\
\ln(1+x) &\sim x \\
\exp(x) &= 1 + x + \mathsf{o}(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \mathsf{o}(x) \\
(1+x)^{\alpha} &= 1 + \alpha x + \mathsf{o}(x) \qquad \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^* \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + \mathsf{o}(x)
\end{aligned}$$

Continuité

- $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$
- Opérations dans $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, composition
- Caractérisation séquentielle de la continuité
- Continuité des fonctions usuelles
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des bornes atteintes
- Les injections continues sont strictement monotones
- Théorème de continuité de la bijection réciproque

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Définition de « A est dense dans $\mathbb{R}$ »
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure
- Résultats autour des hyperplans
- Caractérisation séquentielle de la continuité
- Développements asymptotiques classiques ($\exp(t) = 1 + t + o(t)$, *etc.*)

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \geqslant \Big||z| - |z'|\Big|$
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- Contre-exemples pour :
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \exp(u_n) \sim \exp(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies (u_n)^n \sim (v_n)^n$
- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow$? par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = o(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$

- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathsf{u}_A \in \mathrm{GL}(\underline{\mathbb{K}^n})$
- $\mathrm{Im}(g \circ f) = \cdots$?
- Présentation des projecteurs : définition, dessin, propriétés, preuves
- Présentation des symétries : définition, dessin, propriétés, preuves
- On peut définir une application linéaire « par décret » sur une base : explication, énoncé précis et preuves
- Une fonction continue sur un segment y est bornée
- Une fonction injective et continue est strictement monotone