— Semaine du lundi 11 mars au vendredi 15 mars —

Analyse réelle : continuité et dérivation

Colle n° 20

Continuité

- $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$
- Opérations dans $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, composition
- Caractérisation séquentielle de la continuité
- Continuité des fonctions usuelles
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des bornes atteintes
- Les injections continues sont strictement monotones
- Théorème de continuité de la bijection réciproque
- Norme infinie
- Uniforme continuité, théorème de Heine

Dérivation

- Nombre dérivé, fonction dérivée. Tangente. $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. Dérivée à droite et à gauche.
- Opérations sur les dérivées. Dérivation de la réciproque d'une fonction bijective. Formule de Leibniz.
- $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}), \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.
- $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}) \neq \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$
- Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Extremum local. Lemme de l'extremum local.
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis
- Inégalités des accroissements finis : cas réel
- Inégalité des accroissements finis : cas complexe
- Théorème de la limite de la dérivée.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de ln, exp et sin
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure
- Résultats autour des hyperplans
- Caractérisation séquentielle de la continuité
- Développements asymptotiques classiques ($\mathsf{exp}(t) = 1 + t + \mathsf{o}(t)$, *etc.*)

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
- $E = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Im}(p)$ si p est un projecteur
- $\big(s \in \mathrm{L}(E)$ et $s^2 = \mathsf{Id}_E\big) \implies E = \mathsf{Ker}(s - \mathsf{Id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(s + \mathsf{Id}_E)$.
- « TAF à partir de Rolle »

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z + z'| \geqslant \Big||z| - |z'|\Big|$
- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow$? par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Alors,
$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$
- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathsf{u}_A \in \mathrm{GL}(\underline{\mathbb{K}}^n)$
- $\mathsf{Im}(g \circ f) = \cdots$?
- Présentation des projecteurs : définition, dessin, propriétés, preuves
- Présentation des symétries : définition, dessin, propriétés, preuves
- Une fonction continue sur un segment y est bornée
- Théorème de Heine
- Théorème de Rolle
- TAF
- IAF complexe
- Contre-exemples du chapitre « Dérivation »