— Semaine du lundi 18 mars au vendredi 22 mars —

Dérivation, un peu de dénombrement, début des formules de Taylor

Colle n° 21

Les trois prochaines colles commenceront par un petit exercice de dénombrement.

Dérivation

Même programme que précédemment

Dénombrement

- Définition du cardinal.
  Les preuves n'ont pas été faites en cours, mais distribuées en polycopié.
  Elles ne sont pas au programme de colle.
- Cardinal de $E \times F$, de $\mathscr{F}(E, F)$, de $\mathscr{P}(E)$, de E^n, de l'ensemble des fonctions injectives de E dans F, de $\mathfrak{S}_E$
- p-listes de E sans répétition. Cardinal de l'ensemble de ces listes.
- Parties à p éléments de E
- Applications entre ensembles finis
- Principe des tiroirs

Formules de Taylor

- Polynôme de Taylor
- Formule de Taylor polynomiale
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor Lagrange

Note pour les colleurs
Pour l'insant, seules la formule de Taylor polynomiale, la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange ont été vues. Les DL n'ont pas été vus.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Résultats autour des hyperplans
- Développements asymptotiques classiques ($\exp(t) = 1 + t + o(t)$, *etc.*)
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Formule de Taylor polynomiale

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
- $E = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Im}(p)$ si p est un projecteur
- $\big(s \in \mathrm{L}(E)$ et $s^2 = \mathsf{Id}_E\big) \implies E = \mathsf{Ker}(s - \mathsf{Id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(s + \mathsf{Id}_E)$.
- « TAF à partir de Rolle »

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z + z'| \geqslant \Big||z| - |z'|\Big|$
- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow\ ?$ par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$

- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathsf{u}_A \in \mathrm{GL}(\underline{\mathbb{K}}^n)$
- Présentation des projecteurs : définition, dessin, propriétés, preuves
- Présentation des symétries : définition, dessin, propriétés, preuves
- Théorème de Heine
- Théorème de Rolle
- TAF
- IAF complexe
- Contre-exemples du chapitre « Dérivation »
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Formule de Taylor polynomiale