— Semaine du lundi 8 avril au vendredi 12 avril —

Séries

Colle n° 24

Séries

- Séries à coefficients réels ou complexes. Séries convergentes, divergentes, grossièrement divergentes.
- Comparaison séries-intégrales
- Séries géométriques, séries de Riemann, série harmonique, série harmonique alternée
- Séries à termes positifs (SATP)
- Critère de convergence par équivalence
- Séries absolument convergentes
- Critère de convergence par domination pour les séries ACV
- Critère pour les séries alternées ; majoration du reste
- Critère de Riemann-Bertrand
- Développements décimaux. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Résultats autour des hyperplans
- Développements asymptotiques classiques ($\exp(t) = 1 + t + o(t)$, *etc.*)
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Formule de Taylor polynomiale
- Le lemme permettant la primitivation des DL
- DL usuels

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- $E = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Im}(p)$ si p est un projecteur
- $\big(s \in \mathsf{L}(E) \text{ et } s^2 = \mathsf{Id}_E\big) \implies E = \mathsf{Ker}(s - \mathsf{Id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(s + \mathsf{Id}_E)$.
- « TAF à partir de Rolle »
- Somme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ si $|\alpha| < 1$

Résultats à savoir démontrer

- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \geqslant \Big||z|-|z'|\Big|$
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathsf{L}(E,F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$

- Présentation des projecteurs : définition, dessin, propriétés, preuves
- Présentation des symétries : définition, dessin, propriétés, preuves
- TAF
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Formule de Taylor polynomiale
- Formule de Taylor Young
- $\forall x \in \left]-1,1\right],\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathsf{ln}(1+x)$
- Développement asymptotique de la série harmonique à trois termes (pour les meilleurs)
- ACV $\implies$ CV
- Deux SATP à termes généraux équivalents ont même nature
- Critère pour les séries alternées