— Semaine du lundi 20 mai au vendredi 24 mai —

Algèbre linéaire et EDL

Colle n° 27

La colle commencera par la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre, par la méthode de la variation de la constante.

Algèbre linéaire

Tous les programmes de colle précédents.

Équations différentielles

- Équations différentielles : ordre, linéaires, non linéaires, à coefficients constants, homogènes.
- Principe de superposition, structure de l'ensemble des solutions d'un EDL.
- Résolution des EDL d'ordre 1 : méthode de la variation de la constante.
- Solutions des EDL d'ordre 2 à coefficients constants.
- EDL d'ordre 2 à coefficients constants : cas des seconds membres du type $\mathsf{e}^{\alpha t}$ et $P(t)\mathsf{e}^{\alpha t}$
- Problèmes de Cauchy. Tout problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 ou linéaire à coefficients constants d'ordre 2 admet une unique solution.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de ln, exp et sin
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathsf{L}(E, F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$

- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Formule de Taylor polynomiale
- DL usuels
- Formule de changement de base

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- $E = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Im}(p)$ si p est un projecteur
- $\big(s \in \mathsf{L}(E) \text{ et } s^2 = \mathsf{Id}_E\big) \implies E = \mathsf{Ker}(s - \mathsf{Id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(s + \mathsf{Id}_E)$.
- « TAF à partir de Rolle »
- Somme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ si $|\alpha| < 1$

Résultats à savoir démontrer

- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \geqslant \Big||z| - |z'|\Big|$
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
- Présentation des projecteurs : définition, dessin, propriétés, preuves
- Critère pour les séries alternées
- Lemme de Steinitz
- Théorème et formule du rang
- $\mathsf{dim}\big(E \times F\big) = \mathsf{dim}(E) + \mathsf{dim}(F)$.
- $\mathsf{rg}(f \circ g) \leqslant \mathsf{rg}(f)$
- $\mathsf{rg}(f \circ g) \leqslant \mathsf{rg}(g)$
- Toute matrice est équivalente à J_r
- Synthèse sur le rang d'une matrice (définition, propriétés, cas particuliers, etc.)