

Probabilités et variables aléatoires

Probabilités

- Événements certain, impossible, négligeable, quasi certain, presque sûr.
- Événements incompatibles. Événement contraire.
- Systèmes complets d'événements
- Probabilité conditionnelle. Notation $P_B(A)$ ou $P(A|B)$.
- Événements A et B indépendants
- Famille d'événements (A_1, \dots, A_n) (mutuellement) indépendants

Variables aléatoires

- Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire
- Espérance, variance, covariance
- Famille de VA indépendantes
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
- Lois usuelles : Bernoulli, binomiales, uniformes

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de \ln , \exp et \sin
- Dérivées de \arcsin , \arccos , \arctan ; graphes
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Formule de Taylor polynomiale
- Formule de changement de base
- Formule de la projection orthogonale sur une BON
- Formule de la projection orthogonale sur une BOG
- Savoir retrouver les formules d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ si p est un projecteur
- $(s \in \mathcal{L}(E) \text{ et } s^2 = \text{Id}_E) \implies E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.
- « TAF à partir de Rolle »
- Somme de $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ si $|\alpha| < 1$
- Si \mathcal{F} est une famille finie orthogonale de vecteurs non nuls alors \mathcal{F} est libre.
- $E^\perp = \{0_E\}$
- Si $(e_i)_i$ BON alors, $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$.
- Si $(e_i)_i$ BON alors, $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Résultats à savoir démontrer

- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \geq \left| |z| - |z'| \right|$
- $\forall a > 1, a^n = o(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \rightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
- Critère pour les séries alternées
- Théorème et formule du rang
- $\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg}(f)$
- $\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg}(g)$
- Toute matrice est équivalente à J_r
- Synthèse sur le rang d'une matrice (définition, propriétés, cas particuliers, etc.)
- Si $\alpha \in \mathbb{C}$, si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P(\alpha) = 0$ alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P , de même multiplicité que α .
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors, $F \oplus F^\perp = E$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors, $\inf_{f \in F} \|x - f\| = \|x - \text{p}_F(x)\|$
- Inégalité de Markov
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev