— Semaine du lundi 4 novembre au vendredi 8 novembre —

Applications

Le document en annexe (sur les images réciproques et directes) a été distribué aux élèves mais ces résultats n'ont pas été démontrés.

La démonstration d'un d'entre eux pourra être posée en exercice.

Applications

- Applications : composition, injections, surjections, bijections
- Une application est bijective ssi elle admet une réciproque
- Bijection réciproque, notée f^{-1}, d'une bijection
- Fonctions indicatrices
- L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$
- Images directes (notées $f[A]$) et réciproques (notées $f^{\langle -1 \rangle}[B]$)

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Négation de $P \implies Q$
- Définition de « f (strictement) croissante »
- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire
- Formules de d'addition de $\cos$, de $\sin$ et de $\tan$
- Dérivées de $\cos$, de $\sin$ et de $\tan$

Résultats à savoir démontrer

- $\forall f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \exists g$ paire, $\exists h$ impaire : $f = g + h$ (sans l'unicité)
- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- Formule des « capitaines » : démonstration combinatoire
- Formule du binôme de Newton
- Formule de Bernoulli
- $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathsf{Re}(z) \leqslant |z|$
- Inégalité triangulaire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z - z'| \geqslant |z| - |z'|$
- Formule donnant les solutions de $az^2 + bz + c = 0$
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ avec les bonnes hypothèses
- $g \circ f$ injective $\implies$? (avec les bonnes hypothèses)
- Résultats analogues pour les surjections

« Tirés-en-arrière » et « Poussés-en-avant »

Catalogue de résultats

On considère le diagramme :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

Soient $A, A' \subset E$ et soient $B, B' \subset F$ et soit $C \subset G$. Enfin, soit $x \in E$.
On a :

Divers

$f^{\langle -1 \rangle}\left[\varnothing\right] = \varnothing$

$f^{\langle -1 \rangle}\left[F\right] = E$

Opérations

$f^{\langle -1 \rangle}\left[B \cup B'\right] = f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right] \cup f^{\langle -1 \rangle}\left[B'\right]$

$f^{\langle -1 \rangle}\left[B \cap B'\right] = f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right] \cap f^{\langle -1 \rangle}\left[B'\right]$

$f^{\langle -1 \rangle}\left[\overline{B}\right] = \overline{f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right]}$

Croissance

$B \subset B' \implies f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right] \subset f^{\langle -1 \rangle}\left[B'\right]$

Composition

$(g \circ f)^{\langle -1 \rangle}\left[C\right] = f^{\langle -1 \rangle}\left[g^{\langle -1 \rangle}\left[C\right]\right]$

L'application « tiré-en-arrière »

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(F) &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ B &\longmapsto f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right] \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective) ssi f est surjective (resp. injective).

Divers

$f\left[\varnothing\right] = \varnothing$

$f\left[E\right] \subset F$

$f\left[\{x\}\right] = \left\{f(x)\right\}$

Opérations

$f\left[A \cup A'\right] = f\left[A\right] \cup f\left[A'\right]$

$f\left[A \cap A'\right] \subset f\left[A\right] \cap f\left[A'\right]$

Ni $f\left[\overline{A}\right] \subset \overline{f\left[A\right]}$ ni $f\left[\overline{A}\right] \supset \overline{f\left[A\right]}$ ne sont vraies en général.

Croissance

$A \subset A' \implies f\left[A\right] \subset f\left[A'\right]$

Composition

$(g \circ f)\left[A\right] = g\left[f\left[A\right]\right]$

L'application « poussé-en-avant »

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \mathscr{P}(F) \\ A &\longmapsto f\left[A\right] \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective) ssi f est injective (resp. surjective).

« Tiré-en-arrière » puis « poussé-en-avant » (et *vice versa*)

$$f\left[f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right]\right] \subset B \quad \text{et} \quad A \subset f^{\langle -1 \rangle}\left[f\left[A\right]\right]$$