— Semaine du lundi 9 décembre au vendredi 13 décembre —

Début des polynômes et Calcul intégral

Colle n° 11

La colle inclura un calcul d'intégrale par changement de variable et/ou par IPP.

Programme de la semaine de colle

Début des polynômes

Note pour les colleurs
Les racines multiples, l'arithmétique des polynômes, les questions de factorisation de polynômes n'ont pas été vues. Tout cela sera vu dans un chapitre ultérieur « Arithmétique des polynômes »

- ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; pour les meilleurs $K[X]$ ou $A[X]$)
- $\mathbb{K}[X]$: la construction est non exigible et n'a pas été abordée
- $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$
- Coefficients (notés $\mathsf{c}_k[P]$), coefficient constant, coefficient dominant (notés $\mathsf{c}_{\mathsf{dom}}[P]$), terme dominant, degré
- Formules de Newton et Bernoulli polynomiales
- $\mathbb{K}_n[X]$
- $\deg(PQ)$ et $\deg(P+Q)$
- Intégrité et régularité
- Racines (l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathsf{Z}_{\mathbb{K}}(P)$)
- Fonction $\widetilde{P}$ associée à $P \in \mathbb{K}[X]$
- Le nombre de racines est borné par le degré
- « Critère radicaux de nullité » :
  - ▷ deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ qui coïncident sur un ensemble de cardinal $\geqslant n+1$ sont égaux
  - ▷ deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini sont égaux
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$
- Division euclidienne polynomiale
- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Composition des polynômes, dérivation des polynômes

Calcul intégral

- Primitives usuelles
- Intégration par parties
- Changements de variable
- Primitives des fonctions du type $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec a, b, c non tous nuls
- Primitives des fonctions « polynomiales en $\cos(x)$ et $\sin(x)$ », par linéarisation

Note pour les colleurs
La pratique des IPP et des changements de variable se fait sans justification invoquant les bons caractères $\mathscr{C}^1$.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Négation de $P \implies Q$
- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Dérivées de arcsin, arccos ; graphes
- Expression du coefficient « en X^k » de $P \times Q$

Résultats à savoir démontrer

- Formule donnant les solutions de $az^2 + bz + c = 0$
- $g \circ f$ injective $\implies$? (avec les bonnes hypothèses)
- Résultats analogues pour les surjections
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- $[a, b] = \Big\{ ta + (1-t)b \ ; \ t \in [0, 1] \Big\}$
- L'image directe d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe
- L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe
- φ injectif si, et seulement si, $\mathsf{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$
- Division euclidienne polynomiale : unicité
- Division euclidienne polynomiale : existence
- $P(\alpha) = 0 \iff \exists Q : P = (X - \alpha)Q$
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$