— Semaine du lundi 13 janvier au vendredi 17 janvier —

Suites et comparaison des suites

Colle n° 14

La colle pourra inclure l'étude d'une suite du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Programme de la semaine de colle

Suites

Même programme que la semaine dernière ainsi que :

- Étude des suites du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Comparaison des suites

- Suites équivalentes. Notation : $u_n \sim v_n$
- Cinq équivalents classiques : Si $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ alors
  - $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - $\exp(\varepsilon_n) - 1 \sim \varepsilon_n$
  - $\sqrt{1+\varepsilon_n} - 1 \sim \frac{1}{2} \times \varepsilon_n$
  - $(1+\varepsilon_n)^a - 1 \sim a \times \varepsilon_n$
- Formule de Stirling
- Suites négligeables (notation : $u_n = \mathsf{o}(v_n)$)
- Comparaisons classiques :
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall a > 1,\ n^\alpha = \mathsf{o}(a^n)$
  - $\forall a > 0,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$
  - etc.
- Suites dominées
  Notation : $u_n = \mathsf{O}(u_n)$

Note pour les colleurs
Les développements limités n'ont pas été vus.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Négation de $P \implies Q$
- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Inégalité de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Dérivées de arcsin, arccos ; graphes
- Interpolation de Lagrange
- Définition de « A est dense dans $\mathbb{R}$ »
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- Formule donnant $(f^{-1})'$
- $[a, b] = \Big\{ta + (1-t)b \ ; \ t \in [0,1]\Big\}$
- $P(\alpha) = 0 \iff \exists Q : P = (X - \alpha)Q$
- Présentation de la partie entière
- Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (i) A est dense dans $\mathbb{R}$
  - (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies \exists a \in A : x \leqslant a \leqslant y$
  - (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies \exists a \in A : x < a < y$
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \longrightarrow \sup(A)$.
- Contre-exemples pour :
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \exp(u_n) \sim \exp(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies (u_n)^n \sim (v_n)^n$
- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow ?$ par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathrm{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$