

Matrices

Colle n° 15

La colle commencera par le calcul du noyau d'une matrice de taille 3 ou 4 et/ou par une question de cours.

Matrices

- Calcul matriciel
- Matrices élémentaires $E_{i,j}$
- Transposition
- $M_n(\mathbb{K})$ est un anneau
- Matrices inversibles ; groupe $GL_n(\mathbb{K})$
- Quand A et B commutent, $(A + B)^n = \dots$ et $A^n - B^n = \dots$
- Trace
- Noyau d'une matrice
- A inversible $\iff \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$; le sens réciproque est admis et sera démontré plus tard.
- Une matrice A est inversible ssi elle est inversible à droite (à gauche)
- Matrices diagonales, triangulaires (supérieures) (strictes)
- Espaces des matrices dont les p surdiagonales sont nulles, notées $T_n^{(p)}(\mathbb{K})$
- Matrices symétriques/antisymétriques

Note pour les colleurs

N'ont pas encore été vus :

- Matrices d'opérations élémentaires
- Calcul de l'inverse d'une matrice
- Le caractère inversible d'une matrice est inchangé par opération élémentaire.

Les espaces vectoriels et les applications linéaires seront vues ultérieurement.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Inégalité de convexité de \ln , \exp et \sin
- Dérivées de arcsin, arccos ; graphes
- Interpolation de Lagrange
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure
- Formule donnant AB quand $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$
- Formule donnant AX quand $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$
- $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = ?$

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- $[a, b] = \left\{ ta + (1 - t)b ; t \in [0, 1] \right\}$
- A est dense dans \mathbb{R} si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \rightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \rightarrow \sup(A)$.
- Contre-exemples pour :
 - ▷ $u_n \sim v_n \implies \exp(u_n) \sim \exp(v_n)$
 - ▷ $u_n \sim v_n \implies \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
 - ▷ $u_n \sim v_n \implies (u_n)^n \sim (v_n)^n$
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow ?$ par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1, a^n = o(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \rightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
- $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = ?$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- A inversible $\implies \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
- $A \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $B \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \implies AB \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$