

— Semaine du lundi 27 janvier au vendredi 31 janvier —

Matrices (et un peu d'espaces vectoriels)

Colle n° 16

La colle pourra commencer par :

- le calcul du noyau d'une matrice de taille 3 ou 4
- ou par le calcul de l'inverse d'une matrice
- et/ou par une question de cours.

Matrices

Même programme que la semaine précédente ainsi que :

- Matrices d'opérations élémentaires (matrices d'échange, de dilatation et de transvection)
- Calcul de l'inverse d'une matrice
- Le caractère inversible d'une matrice est inchangé par opération élémentaire.
- Inversibilité et inverse des matrices triangulaires supérieures : preuves
- $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices d'opération élémentaire

Début des espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; ou K corps quelconque)
- Identification de $\mathbb{K}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{K})$. On note $\underline{\mathbb{K}}^n := M_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Familles liées, libres, génératrices, bases.
- Familles de $\underline{\mathbb{K}}^n$: liées si de taille trop grande, non génératrices si de taille trop petite.

Note pour les colleurs

Seul le début des espaces vectoriels a été vu. Par exemple, la notion de sous-espace vectoriel n'a pas encore été vue.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Inégalité de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Dérivées de $\arcsin$, $\arccos$; graphes
- Interpolation de Lagrange
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure
- Formule donnant AB quand $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$
- Formule donnant AX quand $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$
- $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = ?$

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \rightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \rightarrow \sup(A)$.
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow ?$ par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1, a^n = o(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \rightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
- $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = ?$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- A inversible $\implies \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
- $A \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $B \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \implies AB \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$
- Inversibilité et inverse des matrices triangulaires supérieures : preuves
- $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices d'opération élémentaire