— Semaine du lundi 3 février au vendredi 7 février —

Matrices et Espaces vectoriels

Cette colle pourra être l'occasion de revenir sur les matrices.

Matrices

Même programme que la semaine précédente et celle d'avant.

Espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; ou K corps quelconque)
- Identification de $\mathbb{K}^n$ et $\mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On note $\underline{\mathbb{K}}^n \coloneqq \mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Familles liées, libres, génératrices, bases.
- Familles de $\underline{\mathbb{K}}^n$: liées si de taille trop grande, non génératrices si de taille trop petite.
- Produit de deux espaces vectoriels
- Sous-espaces vectoriels
- Intersection de sous-espaces vectoriels, somme de deux sous-espaces vectoriels, somme de p sous-espaces vectoriels
- Espaces en somme directe ; supplémentaire d'un espace.
- Sommes directes à p facteurs
- Espace vectoriel engendré par une partie. Notation : $\mathsf{Vect}(A)$
- Sous-espaces affines

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Inégalité de convexité de ln, exp et sin
- Dérivées de arcsin, arccos ; graphes
- Interpolation de Lagrange
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure
- Formule donnant AB quand $A \in \mathsf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathsf{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
- Formule donnant AX quand $A \in \mathsf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathsf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} = ?$

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \longrightarrow \mathsf{sup}(A)$.
- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow ?$ par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} = ?$
- $\mathsf{tr}(AB) = \mathsf{tr}(BA)$
- A inversible $\implies \mathsf{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
- $A \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $B \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \implies AB \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$
- Inversibilité et inverse des matrices triangulaires supérieures : preuves
- $\mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices d'opération élémentaire