— Semaine du lundi 24 février au vendredi 28 février —

Applications linéaires

Colle n° 18

Applications linéaires

- Applications linéaires, endomorphismes, formes linéaires. Notations : $\mathsf{L}(E,F)$, $\mathsf{L}(E)$.
- Notation : $\underline{\mathbb{K}}^n \coloneqq \mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathsf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée

$$\mathsf{u}_A : \begin{cases} \underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n \\ X \longmapsto AX. \end{cases}$$

- Classifications de $\mathsf{L}(\mathbb{R})$, $\mathsf{L}\big(\underline{\mathbb{R}}^2,\mathbb{R}\big)$, $\mathsf{L}\big(\underline{\mathbb{R}}^2\big)$, $\mathsf{L}(\underline{\mathbb{R}}^p,\underline{\mathbb{R}}^n)$
- $\mathsf{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre
- $\mathsf{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; composition des applications linéaires ; diagrammes.
- Formules de Newton et Bernoulli
- Noyau $\mathsf{Ker}(f)$ d'une application linéaire.
- f injective $\iff \mathsf{Ker}(f) = \{0_E\}$
- Image $\mathsf{Im}(f)$ d'une application linéaire.
- Isomorphismes, $\mathsf{GL}(E)$; espaces isomorphes (notation $E \simeq F$)
- On définit une application linéaire en la définissant sur une base.
- On définit une application linéaire en la définissant sur les facteurs d'une somme directe.
- Quand $E = F \oplus G$, projecteur de E sur F parallèlement à G
- Propriétés des projecteurs.
- $p \in \mathsf{L}(E)$ est un projecteur ssi $p^2 = p$

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Inégalité de convexité de ln, exp et sin
- Dérivées de arcsin, arccos ; graphes
- Interpolation de Lagrange
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure
- Formule donnant AB quand $A \in \mathsf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathsf{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
- Formule donnant AX quand $A \in \mathsf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathsf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} =?$

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \longrightarrow \mathsf{sup}(A)$.
- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow$? par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} =?$
- $\mathsf{tr}(AB) = \mathsf{tr}(BA)$
- A inversible $\implies \mathsf{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
- $A \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $B \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \implies AB \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$
- Inversibilité et inverse des matrices triangulaires supérieures : preuves
- $\mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices d'opération élémentaire
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathsf{L}(E, F)$. Alors,
$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$
- $A \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathsf{u}_A \in \mathsf{GL}(\underline{\mathbb{K}^n})$
- $\mathsf{Im}(g \circ f) = \cdots$?
- On peut définir une application linéaire « par décret » sur une base : explication, énoncé précis et preuves
- Présentation des projecteurs : définition, dessin, propriétés, preuves
- Si p est un projecteur de E, $E = \mathsf{Im}(p) \oplus \mathsf{Ker}(p)$