— Semaine du lundi 10 mars au vendredi 14 mars —

Continuité

Colle n° 20

Limites des fonctions

- Cas où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
- Cas où $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$
- Règles usuelles
- Caractérisation séquentielle de $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

Relations de comparaison : équivalence, négligeabilité, domination

- $f \sim_a g$
- $f = \underset{a}{\mathsf{o}}(g)$
- $f = \underset{a}{\mathsf{O}}(g)$
- Croissances comparées
- On a, quand $x \to 0$, les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &\sim x \\
\ln(1+x) &\sim x \\
\exp(x) &= 1 + x + \mathsf{o}(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \mathsf{o}(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \mathsf{o}(x) \qquad\qquad \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^* \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + \mathsf{o}(x)
\end{aligned}$$

Continuité

- $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$
- Opérations dans $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, composition
- Caractérisation séquentielle de la continuité
- Continuité des fonctions usuelles
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des bornes atteintes
- Les injections continues sont strictement monotones
- Théorème de continuité de la bijection réciproque
- Norme infinie
- Uniforme continuité, théorème de Heine

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Inégalités de convexité de ln, exp et sin
- Interpolation de Lagrange
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} = ?$
- Résultats autour des hyperplans
- Caractérisation séquentielle de la continuité
- Développements asymptotiques classiques ($\mathsf{exp}(t) = 1 + t + \mathsf{o}(t)$, etc.)

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique
- $E = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Im}(p)$ si p est un projecteur
- $\big(s \in \mathsf{L}(E) \text{ et } s^2 = \mathsf{Id}_E\big) \implies E = \mathsf{Ker}(s - \mathsf{Id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(s + \mathsf{Id}_E)$

Résultats à savoir démontrer

- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \longrightarrow \mathsf{sup}(A)$.
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathsf{L}(E, F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$

- $\mathsf{Im}(g \circ f) = \cdots ?$
- On peut définir une application linéaire « par décret » sur une base : explication, énoncé précis et preuves
- Présentation des projecteurs : définition, dessin, propriétés, preuves
- Si p est un projecteur de E, $E = \mathsf{Im}(p) \oplus \mathsf{Ker}(p)$
- Équivalence des deux points de vue sur les hyperplans
- TVI
- Une fonction continue sur un segment y est bornée
- Une fonction continue et injective est strictement monotone
- Théorème de Heine