— Semaine du lundi 17 mars au vendredi 21 mars —

Dérivation

Colle n° 21

La colle pourra aussi porter sur la continuité.

Dérivation

- Nombre dérivé, fonction dérivée. Tangente. $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$. Dérivée à droite et à gauche.
- Opérations sur les dérivées. Dérivation de la réciproque d'une fonction bijective. Formule de Leibniz.
- $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}), \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.
- $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \neq \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$
- Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Extremum local. Lemme de l'extremum local.
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis
- Inégalités des accroissements finis : cas réel, cas complexe
- Théorème de la limite de la dérivée. Application au prolongement des fonctions $\mathscr{C}_k$

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Inégalités de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Interpolation de Lagrange
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} = ?$
- Caractérisation séquentielle de la continuité
- Développements asymptotiques classiques ($\exp(t) = 1 + t + \mathrm{o}(t)$, etc.)

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique
- $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ si p est un projecteur
- $\big(s \in \mathrm{L}(E) \text{ et } s^2 = \mathrm{Id}_E\big) \implies E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$
- « TAF à partir de Rolle »

Résultats à savoir démontrer

- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$

- Si p est un projecteur de E, $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$
- TVI
- Une fonction continue sur un segment y est bornée
- Une fonction continue et injective est strictement monotone
- Théorème de Heine
- Théorème de Rolle
- TAF
- IAF complexe
- Contre-exemples du chapitre « Dérivation »