— Semaine du lundi 9 juin au vendredi 6 juin —

Polynômes II

(généralités, arithmétique, lien avec l'algèbre linéaire)

Colle n° 29

Polynômes II

- Inversibles de $\mathbb{K}[X]$
- Division euclidienne
- Relation de divisibilité sur $\mathbb{K}[X]$
- Multiplicité des racines (notée $\mathsf{m}_\alpha(P)$) ; caractérisation par les dérivées successives
- Relations coefficients-racines
- Polynômes scindés
- Polynômes irréductibles
- Théorème de d'Alembert-Gauss
- PGCD de polynômes, algorithme d'Euclide, relation de Bézout
- Polynômes premiers entre eux
- Formule de Taylor polynomiale

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Inégalités de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Interpolation de Lagrange
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} = ?$
- Caractérisation séquentielle de la continuité
- Développements asymptotiques classiques ($\exp(t) = 1 + t + \mathsf{o}(t)$, etc.)
- Formule de changement de base

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique
- $E = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Im}(p)$ si p est un projecteur
- $\big(s \in \mathsf{L}(E)$ et $s^2 = \mathsf{Id}_E\big) \implies E = \mathsf{Ker}(s - \mathsf{Id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(s + \mathsf{Id}_E)$
- « TAF à partir de Rolle »

Résultats à savoir démontrer

- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathsf{L}(E, F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$

- Si p est un projecteur de E, $E = \mathsf{Im}(p) \oplus \mathsf{Ker}(p)$
- Lemme de Steinitz
- Théorème et formule du rang
- $\mathsf{dim}\big(E \times F\big) = \mathsf{dim}(E) + \mathsf{dim}(F)$.
- $f \in \mathsf{L}(E)$ injective $\implies$ $f \in \mathsf{L}(E)$ isomorphisme, quand E est de dimension finie.
- $\mathsf{rg}(f \circ g) \leqslant \mathsf{rg}(f)$
- $\mathsf{rg}(f \circ g) \leqslant \mathsf{rg}(g)$
- Toute matrice est équivalente à J_r
- Synthèse sur le rang d'une matrices (définition, propriétés, cas particuliers, etc.)
- Si $\alpha \in \mathbb{C}$, si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P(\alpha) = 0$ alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P, de même multiplicité que α.