— Semaine du lundi 16 juin au vendredi 20 juin —

Espaces préhilbertiens réels

Colle n° 30

Espaces préhilbertiens réels

- Produits scalaires
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Orthogonal d'une partie
- Existence de bases orthonormales en dimension finie
- Projection orthogonale sur un sous-espace admettant un supplémentaire orthogonal
- Distance à un sous-espace vectoriel admettant un supplémentaire orthogonal
- Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Inégalités de convexité de ln, exp et sin
- Interpolation de Lagrange
- $\mathsf{E}_{i,j} \times \mathsf{E}_{k,\ell} = ?$
- Caractérisation séquentielle de la continuité
- Développements asymptotiques classiques ($\mathsf{exp}(t) = 1 + t + \mathsf{o}(t)$, etc.)
- Formule de changement de base
- Formule de la projection orthogonale sur une BON
- Formule de la projection orthogonale sur une BOG
- Savoir retrouver les formules d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- $E = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Im}(p)$ si p est un projecteur
- $\big(s \in \mathsf{L}(E) \text{ et } s^2 = \mathsf{Id}_E\big) \implies E = \mathsf{Ker}(s - \mathsf{Id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(s + \mathsf{Id}_E)$
- « TAF à partir de Rolle »
- Si $\mathscr{F}$ est une famille finie orthogonale de vecteurs non nuls alors $\mathscr{F}$ est libre.
- $E^\perp = \{0_E\}$
- Si $(e_i)_i$ BON alors, $\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} (x \,|\, e_i) e_i$.
- Si $(e_i)_i$ BON alors, $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Résultats à savoir démontrer

- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathsf{L}(E, F)$. Alors,
$$f \text{ injectif} \iff \big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big) \text{ libre.}$$
- Si p est un projecteur de E, $E = \mathsf{Im}(p) \oplus \mathsf{Ker}(p)$
- Lemme de Steinitz
- Théorème et formule du rang
- $\mathsf{dim}\big(E \times F\big) = \mathsf{dim}(E) + \mathsf{dim}(F)$.
- $f \in \mathsf{L}(E)$ injective $\implies$ $f \in \mathsf{L}(E)$ isomorphisme, quand E est de dimension finie.
- $\mathsf{rg}(f \circ g) \leqslant \mathsf{rg}(f)$
- $\mathsf{rg}(f \circ g) \leqslant \mathsf{rg}(g)$
- Toute matrice est équivalente à J_r
- Synthèse sur le rang d'une matrices (définition, propriétés, cas particuliers, etc.)
- Si $\alpha \in \mathbb{C}$, si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P(\alpha) = 0$ alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P, de même multiplicité que α.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors, $F \oplus F^{\perp} = E$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors, $\mathsf{inf}_{f \in F} \|x - f\| = \|x - \mathsf{p}_F(x)\|$