— Semaine du lundi 3 novembre au vendredi 7 novembre —

Applications

Colle n° 6

Le document en annexe (sur les images réciproques et directes) a été distribué aux élèves mais ces résultats n'ont pas été démontrés.

La démonstration d'un d'entre eux pourra être posée en exercice.

Programme de la semaine de colle

Applications

- Applications : composition, injections, surjections, bijections
- Une application est bijective ssi elle admet une réciproque
- Bijection réciproque, notée f^{-1}, d'une bijection
- Fonctions indicatrices
- L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$
- Images directes (notées $f[A]$) et réciproques (notées $f^{\langle -1 \rangle}[B]$)

Note pour les colleurs
La colle pourra aussi inclure des exercices de trigonométrie

Trigonométrie

- Sinus, cosinus, tangente
- Dérivées des fonctions trigonométriques
- Formules d'addition
- Techniques de l'angle-moitié
- Linéarisation et délinéarisation

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Négation de $P \implies Q$
- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire
- Formules de duplication de $\cos$, de $\sin$ et de $\tan$
- Dérivées de $\cos$, de $\sin$ et de $\tan$

Résultats à savoir démontrer

- Unicité dans la division euclidienne
- Soit $a \neq 1$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.
- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- Formule des « capitaines » : démonstration combinatoire
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0,n]\!],\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ par récurrence
- Formule du binôme de Newton
- Formule de Bernoulli
- $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathsf{Re}(z) \leqslant |z|$
- Inégalité triangulaire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z - z'| \geqslant |z| - |z'|$
- Formule donnant les solutions de $az^2 + bz + c = 0$
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ avec les bonnes hypothèses
- $g \circ f$ injective $\implies$? (avec les bonnes hypothèses)
- Résultats analogues pour les surjections

« Tirés-en-arrière » et « Poussés-en-avant »

Catalogue de résultats

On considère le diagramme :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

Soient $A, A' \subset E$ et soient $B, B' \subset F$ et soit $C \subset G$. Enfin, soit $x \in E$.
On a :

Divers

$f^{\langle -1 \rangle}\big[\varnothing\big] = \varnothing$
$f^{\langle -1 \rangle}\big[F\big] = E$

Opérations

$f^{\langle -1 \rangle}\big[B \cup B'\big] = f^{\langle -1 \rangle}\big[B\big] \cup f^{\langle -1 \rangle}\big[B'\big]$
$f^{\langle -1 \rangle}\big[B \cap B'\big] = f^{\langle -1 \rangle}\big[B\big] \cap f^{\langle -1 \rangle}\big[B'\big]$

$f^{\langle -1 \rangle}\Big[\overline{B}\Big] = \overline{f^{\langle -1 \rangle}\big[B\big]}$

Croissance

$B \subset B' \implies f^{\langle -1 \rangle}\big[B\big] \subset f^{\langle -1 \rangle}\big[B'\big]$

Composition

$(g \circ f)^{\langle -1 \rangle}\big[C\big] = f^{\langle -1 \rangle}\Big[g^{\langle -1 \rangle}\big[C\big]\Big]$

L'application « tiré-en-arrière »

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(F) &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ B &\longmapsto f^{\langle -1 \rangle}\big[B\big] \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective) ssi f est surjective (resp. injective).

Divers

$f\big[\varnothing\big] = \varnothing$
$f\big[E\big] \subset F$

$f\Big[\{x\}\Big] = \Big\{f(x)\Big\}$

Opérations

$f\big[A \cup A'\big] = f\big[A\big] \cup f\big[A'\big]$
$f\big[A \cap A'\big] \subset f\big[A\big] \cap f\big[A'\big]$

Ni $f\Big[\overline{A}\Big] \subset \overline{f\big[A\big]}$ ni $f\Big[\overline{A}\Big] \supset \overline{f\big[A\big]}$ ne sont vraies en général.

Croissance

$A \subset A' \implies f\big[A\big] \subset f\big[A'\big]$

Composition

$(g \circ f)\big[A\big] = g\Big[f\big[A\big]\Big]$

L'application « poussé-en-avant »

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \mathscr{P}(F) \\ A &\longmapsto f\big[A\big] \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective) ssi f est injective (resp. surjective).

« Tiré-en-arrière » puis « poussé-en-avant » (et *vice versa*)

$$f\Big[f^{\langle -1 \rangle}\big[B\big]\Big] \subset B \quad \text{et} \quad A \subset f^{\langle -1 \rangle}\Big[f\big[A\big]\Big]$$