

Polynômes I

Note pour les colleurs

Les racines multiples, l'arithmétique des polynômes, les questions de factorisation de polynômes n'ont pas été vues. Tout cela sera vu dans un chapitre ultérieur, « Arithmétique des polynômes ».

Programme de la semaine de colle

Polynômes I

- $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}; \text{ pour les meilleurs } K[X] \text{ ou } A[X])$
- $\mathbb{K}[X]$: la construction est non exigible et n'a pas été abordée
- $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$
- Coefficients (notés $c_k[P]$), coefficient constant, coefficient dominant (notés $c_{\text{dom}}[P]$), terme dominant, degré
- Formules de Newton et Bernoulli polynomiales
- $\mathbb{K}_n[X]$
- Expression générale des coefficients du produit
- $\deg(PQ)$ et $\deg(P + Q)$
- Intégrité et régularité
- Racines (l'ensemble des racines de P dans \mathbb{K} est noté $Z_{\mathbb{K}}(P)$)
- Fonction \tilde{P} associée à $P \in \mathbb{K}[X]$
- Le nombre de racines est borné par le degré
- « Critère radicaux de nullité » :
 - ▷ deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ qui coïncident sur un ensemble de cardinal $\geq n + 1$ sont égaux
 - ▷ deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini sont égaux
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$
- Division euclidienne polynomiale
- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Composition des polynômes, dérivation des polynômes
- Interpolation de Lagrange

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Formules de duplication de \cos , de \sin et de \tan
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalités de convexité de \ln , \exp et \sin
- Dérivées de \arcsin , \arccos ; graphes
- Expression du coefficient « en X^k » de $P \times Q$
- Interpolation de Lagrange

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \leq |z|$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z - z'| \geq |z| - |z'|$
- $g \circ f$ injective $\implies ?$ (avec les bonnes hypothèses)
- Résultats analogues pour les surjections
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- $[a, b] = \left\{ ta + (1 - t)b ; t \in [0, 1] \right\}$
- f' croissante $\implies f$ convexe
- Lemmes des trois pentes
- Une fonction dérivable convexe est au-dessus de ses tangentes
- \arcsin est impaire
- $\arcsin + \arccos = \frac{\pi}{2}$: démonstration sans utiliser la dérivation
- L'image directe d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe
- L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe
- Pour les morphismes de groupes : φ injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$
- Sous-groupe engendré par une partie : présentation et résultats
- Division euclidienne polynomiale : unicité
- Division euclidienne polynomiale : existence
- $P(\alpha) = 0 \iff \exists Q : P = (X - \alpha)Q$
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$