

— Semaine du lundi 15 décembre au vendredi 19 décembre —

Calcul intégral, Supremum

Colle n° 12

La colle inclura un calcul d'intégrale par changement de variable et/ou par IPP.

Programme de la semaine de colle

Calcul intégral

- Primitives usuelles
- Intégration par parties
- Changements de variable
- Primitives des fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec a, b, c non tous nuls
- Primitives des fonctions « polynomiales en $\cos(x)$ et $\sin(x)$ », par linéarisation

Note pour les colleurs

La pratique des IPP et des changements de variable se fait sans justification invoquant les bons caractères \mathcal{C}^1 .

Nombres réels (début)

- Minorants, majorants, plus petit élément (minimum), plus grand élément (maximum)
- Supremum (aussi appelé borne supérieure), et infimum (aussi appelé borne inférieure)
- Propriété fondamentale de \mathbb{R}
- Adhérence à la partie (« à la ε ») du supremum et de l'infimum

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Formules de duplication de \cos , de \sin et de \tan
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalités de convexité de \ln , \exp et \sin
- Dérivées de \arcsin , \arccos ; graphes
- Expression du coefficient « en X^k » de $P \times Q$
- Interpolation de Lagrange
- Adhérence à la partie (« à la ε ») du supremum (et/ou de l'infimum)

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \leq |z|$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z - z'| \geq |z| - |z'|$
- $g \circ f$ injective \implies ? (avec les bonnes hypothèses)
- Résultats analogues pour les surjections
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- $[a, b] = \left\{ ta + (1 - t)b ; t \in [0, 1] \right\}$
- f' croissante $\implies f$ convexe
- Lemmes des trois pentes
- Une fonction dérivable convexe est au-dessus de ses tangentes
- \arcsin est impaire
- $\arcsin + \arccos = \frac{\pi}{2}$: démonstration sans utiliser la dérivation
- L'image directe d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe
- L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe
- Pour les morphismes de groupes : φ injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$
- Sous-groupe engendré par une partie : présentation et résultats
- Division euclidienne polynomiale : unicité
- Division euclidienne polynomiale : existence
- $P(\alpha) = 0 \iff \exists Q : P = (X - \alpha)Q$
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$
- Toute partie majorée et non vide de \mathbb{Z} admet un maximum
- Définition de la partie entière
- Croissance de la partie entière