— Semaine du lundi 12 janvier au vendredi 16 janvier —

Suites et équivalents des suites

Colle n° 14

Programme de la semaine de colle

Suites

Même programme que précédemment ainsi que :

- Théorèmes d'existence de limites (théorème « des gendarmes », theorème « de la limite monotone »).
- Suites adjacentes. Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Point de vue séquentiel sur la densité et la borne supérieure

Comparaison des suites

- Suites équivalentes. Notation : $u_n \sim w_n$
- Cinq équivalents classiques : Si $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ alors
  - ▷ $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - ▷ $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - ▷ $\exp(\varepsilon_n) - 1 \sim \varepsilon_n$
  - ▷ $\sqrt{1+\varepsilon_n} - 1 \sim \frac{1}{2} \times \varepsilon_n$
  - ▷ $(1+\varepsilon_n)^a - 1 \sim a \times \varepsilon_n$
- Formule de Stirling

Note pour les colleurs
Les grands « O » et les petits « o » n'ont pas encore été vus. Les développements limités n'ont pas été vus.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Formules de duplication de cos, de sin et de tan
- Définition de f convexe
- Inégalités de convexité de ln, exp et sin
- Dérivées de arcsin, arccos ; graphes
- Expression du coefficient « en X^k » de $P \times Q$
- Interpolation de Lagrange
- Adhérence à la partie (« à la ε ») du supremum (et/ou de l'infimum)

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z - z'| \geqslant |z| - |z'|$
- $P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X - \alpha)Q$
- $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$
- Toute partie majorée et non vide de $\mathbb{Z}$ admet un maximum
- Définition de la partie entière
- Croissance de la partie entière
- I convexe $\implies$ I intervalle : démonstration d'un des neuf cas.
- Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) A est dense dans $\mathbb{R}$
  (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies \exists a \in A : x \leqslant a \leqslant y$
  (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies \exists a \in A : x < a < y$
- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Alors, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \longrightarrow \mathsf{sup}(A)$.
- Contre-exemples pour :
  ▷ $u_n \sim w_n \implies \mathsf{exp}(u_n) \sim \mathsf{exp}(w_n)$
  ▷ $u_n \sim w_n \implies \mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(w_n)$
  ▷ $u_n \sim w_n \implies (u_n)^n \sim (w_n)^n$