— Semaine du lundi 19 janvier au vendredi 23 janvier —

Suites et comparaison des suites

La colle pourra commencer par un « combat » entre deux suites : qui est négligeable devant l'autre entre $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$?.

Programme de la semaine de colle

Suites

Même programme que précédemment.

Comparaison des suites

- Suites équivalentes. Notation : $u_n \sim w_n$
- Cinq équivalents classiques : Si $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ alors
  - ▷ $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - ▷ $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
  - ▷ $\exp(\varepsilon_n) - 1 \sim \varepsilon_n$
  - ▷ $\sqrt{1+\varepsilon_n} - 1 \sim \frac{1}{2} \times \varepsilon_n$
  - ▷ $(1+\varepsilon_n)^a - 1 \sim a \times \varepsilon_n$
- Formule de Stirling
- Suites négligeables (notation : $u_n = \mathrm{o}(w_n)$)
- Comparaisons classiques :
  - ▷ $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall a > 1,\ n^\alpha = \mathrm{o}(a^n)$
  - ▷ $\forall a > 0,\ a^n = \mathrm{o}(n!)$
  - ▷ etc.
- Suites dominées
  Notation : $u_n = \mathrm{O}(u_n)$

Note pour les colleurs
Les développements limités n'ont pas été vus.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Formules de duplication de $\cos$, de $\sin$ et de $\tan$
- Définition de f convexe
- Inégalités de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Dérivées de $\arcsin$, $\arccos$; graphes
- Expression du coefficient « en X^k » de $P \times Q$
- Interpolation de Lagrange
- Adhérence à la partie (« à la ε ») du supremum (et/ou de l'infimum)

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z - z'| \geqslant |z| - |z'|$
- $P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X - \alpha)Q$
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$
- Toute partie majorée et non vide de $\mathbb{Z}$ admet un maximum
- I convexe $\implies$ I intervalle : démonstration d'un des neuf cas.
- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$
- Contre-exemples pour :
  - $\triangleright$ $u_n \sim w_n \implies \mathsf{exp}(u_n) \sim \mathsf{exp}(w_n)$
  - $\triangleright$ $u_n \sim w_n \implies \mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(w_n)$
  - $\triangleright$ $u_n \sim w_n \implies (u_n)^n \sim (w_n)^n$
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow$? par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1,\ a^n = \mathsf{o}(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\mathsf{ln}(u_n) \sim \mathsf{ln}(v_n)$