

— Semaine du lundi 9 février au vendredi 13 février —

Début des applications linéaires

Colle n° 18

Programme de la semaine de colle

Applications linéaires

- Applications linéaires, endomorphismes, formes linéaires. Notations : $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$.
- Notation : $\underline{\mathbb{K}}^n := \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée

$$\mathbf{u}_A : \begin{cases} \underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n \\ X \longmapsto AX. \end{cases}$$

- Classifications de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ; composition des applications linéaires ; diagrammes.
- Formules de Newton et Bernoulli
- Noyau $\text{Ker}(f)$ d'une application linéaire.
- f injective $\iff \text{Ker}(f) = \{0_E\}$
- Image $\text{Im}(f)$ d'une application linéaire.
- Isomorphismes, $\text{GL}(E)$; espaces isomorphes (notation $E \simeq F$)

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Inégalités de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Expression du coefficient « en X^k » de $P \times Q$
- Interpolation de Lagrange
- Adhérence à la partie (« à la ε ») du supremum (et/ou de l'infimum)
- Formule donnant AB quand $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
- Formule donnant AX quand $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
- $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = ?$

Résultats à savoir démontrer

- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z - z'| \geq |z| - |z'|$
- I convexe $\implies I$ intervalle : démonstration d'un des neuf cas.
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow ?$ par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1, a^n = o(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- A inversible $\implies \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
- $A \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $B \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \implies AB \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff (f(e_1), \dots, f(e_p)) \text{ libre.}$$

- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff u_A \in \text{GL}(\underline{\mathbb{K}}^n)$