

Applications linéaires

Colle n° 19

Programme de la semaine de colle

Applications linéaires

- Applications linéaires, endomorphismes, formes linéaires. Notations : $L(E, F)$, $L(E)$.
- Notation : $\mathbb{K}^n := M_{n,1}(\mathbb{K})$
- Application linéaire canoniquement associée à $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, notée

$$u_A : \begin{cases} \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto AX. \end{cases}$$

- Classifications de $L(\mathbb{R})$, $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $L(\mathbb{R}^2)$, $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$
- $L(E)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre
- $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ; composition des applications linéaires ; diagrammes.
- Formules de Newton et Bernoulli
- Noyau $\text{Ker}(f)$ d'une application linéaire.
- f injective $\iff \text{Ker}(f) = \{0_E\}$
- Image $\text{Im}(f)$ d'une application linéaire.
- Isomorphismes, $\text{GL}(E)$; espaces isomorphes (notation $E \simeq F$)
- On définit une application linéaire en la définissant sur une base.
- On définit une application linéaire en la définissant sur les facteurs d'une somme directe.
- Quand $E = F \oplus G$, projecteur de E sur F parallèlement à G
- Propriétés des projecteurs.
- $p \in L(E)$ est un projecteur ssi $p^2 = p$
- Symétries
- Hyperplans et formes linéaires

Note pour les colleurs

La théorie de la dimension n'a pas encore été vue !

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Relation de Pascal
- Inégalités de convexité de $\ln$, $\exp$ et $\sin$
- Expression du coefficient « en X^k » de $P \times Q$
- Interpolation de Lagrange
- Adhérence à la partie (« à la ε ») du supremum (et/ou de l'infimum)
- Formule donnant AB quand $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$
- Formule donnant AX quand $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$
- $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = ?$

Résultats à savoir démontrer

- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z - z'| \geq |z| - |z'|$
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow ?$ par la nouvelle méthode (avec les équivalents)
- $\forall a > 1, a^n = o(n!)$ (sans la formule de Stirling)
- Si $u_n \rightarrow +\infty$ et si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- A inversible $\implies \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
- $A \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $B \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \implies AB \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$
- Soient E, F des espaces vectoriels et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

$$f \text{ injectif} \iff (f(e_1), \dots, f(e_p)) \text{ libre.}$$

- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff u_A \in \text{GL}(\underline{\mathbb{K}}^n)$
- $\text{Im}(g \circ f) = \dots ?$
- On peut définir une application linéaire « par décret » sur une base : explication, énoncé précis et preuves
- Présentation des projecteurs : définition, dessin, propriétés, preuves
- Si p est un projecteur de E , $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$
- Si s est une symétrie de E , $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$
- (dure) Équivalence des deux points de vue sur les hyperplans