

— Semaine du lundi 5 octobre au vendredi 9 octobre —

Sommes et systèmes

Colle n° 4

La colle commencera par la résolution d'un système à au plus quatre inconnues.

Programme de la semaine de colle

Coefficients binomiaux

- Définition combinatoire de $\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$
- Formule de Pascal
- Expression des coefficients binomiaux avec des factorielles
- Formules des capitaines et d'absorption

Techniques algébriques

- Sommes Σ : sommes simples, changements de variables $\ell = k + 1$, $\ell = n - k$.
- Sommes télescopiques
- Sommes indexées par un ensemble I fini
- Sommes classiques :
 - ▷ $\sum_{k=1}^n k^p$ pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$
 - ▷ $\sum_{k=n_0}^{n_1} a^k$ pour $a \neq 1$
 - ▷ somme des termes consécutifs d'une suite géométrique ou arithmétique
- Formule du binôme de Newton, formule de Bernoulli ($a^n - b^n = \dots$)
- Produits
- Sommes doubles « rectangulaires »
- Sommes doubles « triangulaires »
- Résolution de systèmes linéaires (au plus 4 – 4)

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Négation de $P \implies Q$
- Négation d'assertions quantifiées
- Définition de « f (strictement) croissante »
- Principe de récurrence (sous la forme d'un théorème)
- Principe de récurrence forte (sous la forme d'un théorème)
- Définition de $\binom{n}{k}$
- Relation de Pascal
- Formule du binôme de Newton
- Formule de Bernoulli

Résultats à savoir démontrer

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\forall f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \exists g$ paire, $\exists h$ impaire : $f = g + h$ (sans l'unicité)
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \iff a = 0$.
- Soit $a \neq 1$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.
- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- Formule des « capitaines » : démonstration combinatoire
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ par récurrence
- Pour tout ensemble E et pour toute famille de parties $(A_i)_i \in \mathcal{P}(E)^I$,

$$\bigcap_{i \in I} A_i \cup B_i = \bigcup_{X \in \mathcal{P}(I)} \left(\bigcap_{i \in X} A_i \cap \bigcap_{i \in I \setminus X} B_i \right)$$

- Formule du binôme de Newton
- Formule de Bernoulli
- Inégalité triangulaire (dans $\mathbb{C}$)