Devoir à la maison n°1

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice 1

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$.

1. Montrer que $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.
   Montrer que $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.
2. Montrer que : ($g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives) $\Longleftrightarrow f, g$ et h bijectives

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
3. Evaluer $f^{-1}([0, 2[)$
4. Montrer que $g = f_{|[-1,1]}^{|[-1,1]}$ est une bijection

Exercice 3

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}*$.
On considère la suite (u_n) définie par récurence par :

$$u_0 = \alpha, \qquad u_1 = \beta \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
Indication. On commencera par supposer que $u_n \neq 0$ et remarquerons que $u_4 = \dfrac{1+\alpha}{\beta} \dots$

Exercice 4

Evaluer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} jk$. En déduire, de nouveau, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.