

Devoir à la maison n°1 CORRECTION

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.

Exercice 1

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$.

1. Supposons que $g \circ f$ est injective.

Soient $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Alors, on applique $g : g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Comme $g \circ f$ est injective, on a donc $x_1 = x_2$.

Par conséquent, f est injective.

$$\boxed{g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective.}}$$

Supposons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $y \in C$, comme $g \circ f$ est surjective, il existe $a \in A$ tel que $(g \circ f)(a) = y$.

Alors : $y = g(f(a))$. Notons $x = f(a) \in B$

Alors $g(x) = y$.

Par conséquent, g est surjective.

$$\boxed{g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective.}}$$

2. Supposons que f, g et h bijectives.

C'est un résultat du cours, la bijectivité est conservée par composition.

Donc $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

Réciproquement, supposons que $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives.

Donc $g \circ f$ est surjective, donc d'après la question précédente : g est surjective.

Donc $h \circ g$ est injective, donc d'après la question précédente : g est injective.

Par conséquent, g est bijective. On note g^{-1} , l'application réciproque.

Ensuite, $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective par composition de fonctions bijectives.

Et, $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective par composition de fonctions bijectives.

$$\boxed{(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ bijectives}) \iff f, g \text{ et } h \text{ bijectives.}}$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

1. $f(x) = y \iff 2x = y(1+x^2) \iff yx^2 - 2x + y = 0$ A y fixé, il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2.

Son discriminant est $\Delta(y) = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$.

Si $y = \frac{1}{2}$, alors $\Delta = 3 > 0$

et donc il y a deux racines à l'équation $x_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Ainsi $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}$.

Donc f n'est pas injective.

Si $y = 2$, alors $\Delta = -12 < 0$

et donc il y a deux racines à l'équation $f(x) = 2$

Donc f n'est pas surjective.

2. Deux méthodes.

— On peut reprendre $\Delta(y)$. $y \in f(\mathbb{R})$ ssi $\Delta(y) \geq 0$.

Or $\Delta(y) = 4(1 - y^2)$. Donc $y \in f(\mathbb{R})$ ssi $1 - y^2 \geq 0 \iff y^2 \leq 1 \iff y \in [-1, 1]$ Donc $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

— On peut étudier les variations de f .

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

On a donc les variations suivantes :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
f	0	$\searrow$	$\nearrow$	0

où l'on a fait : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{\frac{1}{x} + x} = 0$

On a bien $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

3. $x \in f^{-1}([0, 2]) \iff f(x) \in [0, 2]$.

D'après le tableau de variations, et en ajoutant le fait que $f(0) = 0$,

$f(x) \in [0, 2]$ si et seulement si $x \in [0, +\infty[$

$f^{-1}([0, 2]) = \mathbb{R}_+$

4. On peut reprendre l'étude des variations, par exemple

$g = f|_{[-1, 1]}$ est une bijection.

Exercice 3

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n}$$

Les divisions suivantes ne posent aucun problème puisque α et β sont non nuls.

Calculons les premiers termes :

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha \\ u_1 &= \beta \\ u_2 &= \frac{1 + u_1}{u_0} = \frac{1 + \beta}{\alpha} \\ u_3 &= \frac{1 + u_2}{u_1} = \frac{1 + \frac{1 + \beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ u_4 &= \frac{1 + u_3}{u_2} = \frac{1 + \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta}}{\frac{1 + \beta}{\alpha}} = \frac{1 + \alpha + \beta + \alpha\beta}{(1 + \beta)\beta} = \frac{1 + \alpha}{\beta} \\ u_5 &= \frac{1 + u_4}{u_3} = \frac{1 + \frac{1 + \alpha}{\beta}}{\frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta}} = \alpha = u_0 \\ u_6 &= \frac{1 + u_5}{u_4} = \frac{1 + \alpha}{\frac{1 + \alpha}{\beta}} = \beta = u_1 \end{aligned}$$

On remarque que $u_5 = u_0$, $u_6 = u_1$. Et la suite est à deux termes.

Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_n : \ll u_n = \alpha[n \equiv 0[5]] + \beta[n \equiv 1[5]] + \frac{1 + \beta}{\alpha}[n \equiv 2[5]] + \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta}[n \equiv 3[5]] + \frac{1 + \alpha}{\beta}[n \equiv 4[5]] \gg$$

où l'on a noté $[P(n)] = \begin{cases} 0 & \text{si } P(n) \text{ fautive} \\ 1 & \text{si } P(n) \text{ vraie} \end{cases}$ (symbole d'Iverson)

- Le résultat est vraie pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \llbracket n, n + 6 \rrbracket$.
Comme $n + 6 \equiv n + 1[5]$ et $n + 5 \equiv n[5]$, on a $u_{n+6} = u_{n+1}$ et $u_{n+5} = u_n$.
Puis

$$u_{n+7} = \frac{1 + u_{n+6}}{u_{n+5}} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n} = u_{n+2}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+7}$ est également vraie.

Le résultat est démontré par récurrence :

(u_n) est périodique de période de taille 5 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha[n \equiv 0[5]] + \beta[n \equiv 1[5]] + \frac{1 + \beta}{\alpha}[n \equiv 2[5]] + \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta}[n \equiv 3[5]] + \frac{1 + \alpha}{\beta}[n \equiv 4[5]]$

Exercice 4

On note $S_n = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} jk$.

On a alors

$$S_n = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n jk \right) = \sum_{j=1}^n j \sum_{k=j}^n k = \sum_{j=1}^n j \frac{(n+j)(n-j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n(n+1)j + j^2 - j^3)$$

On a également :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k kjk \right) = \sum_{k=1}^n k \sum_{j=1}^k j = \sum_{k=1}^n k \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k^3)$$

Les lettres k et j sont arbitraires :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k^3) = S_n = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^3$$

On simplifie, *comme pour une équation* :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$