Devoir à la maison n°2

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

A. Relation trigonométrique

1. Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$, simplifier l'expression : $\dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$
   On attend une relation sous forme de somme de puissance de $\cos\theta$
2. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0[\pi]$. On note $\overline{x} = \cos\theta$.
   On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$
   (a) Quelles sont les valeurs de u_0, u_1 et u_2 ?
   On donnera des expressions sous forme de polynôme de $\overline{x}$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_{n+1} = 2\overline{x}u_n - u_{n-1}$$

B. Construction de la famille de polynômes de Tchebychev de seconde espèce

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $U_0 : x \mapsto 1$ et $U_1 : x \mapsto 2x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} : x \mapsto 2x \times U_n(x) - U_{n-1}(x)$$

1. Construction de (U_n).
   (a) Expliciter U_2, U_3 et U_4.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est bien une fonction polynomiale et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de U_n et son coefficient dominant. Quelle est la parité de U_n ?
   (c) On note donc, pour tout $k \leqslant n$, $c_k(U_n)$, le coefficient de U_n de x^k dans l'écriture polynomiale.
   Montrer : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0, n]\!]$, $c_k(U_{n+2}) = 2c_{k-1}(U_{n+1}) - c_k(U_n)$.
   En déduire que tous les coefficients de U_n sont des entiers relatifs.
2. Autre expression.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \not\equiv 0[\pi]$: $U_n(\cos\theta) = u_n$ (définie en A)
   Il faudrait en toute rigueur noter $u_n(\theta)$, mais nous décidons de ne pas alourdir les notations.
   (b) Que vaut $U_n(0)$? Que valent $U_n(1)$, $U_n(-1)$ (on pourra utiliser la règle de Lhospital) ?
   (c) On suppose $n \geqslant 1$, montrer que U_n admet n racines réelles distinctes. Les déterminer.

C. Propriétés différentielle

1. Intégrale
   (a) Soient $n, m \in \mathbb{N}$, deux entiers distincts. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t = 0$
   (b) Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Grâce à un changement de variables, montrer que
   $$\int_{-1}^{1} U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$
2. Equation différentielle
   (a) Montrer que U_n vérifie l'équation différentielle :
   $$\forall\ x \in]-1, 1[, \qquad n(n+2)y - 3xy' + (1-x^2)y'' = 0$$
   (On pourra considérer la fonction $z :]0, \pi[\to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \sin\theta U_n(\cos\theta)$)
   (b) (*) En utilisant la relation précédente, exprimer explicitement les coefficients $c_k(U_n)$.
   On commencera par montrer que : $\forall\ 2 \leqslant h \leqslant n$, $a_{h-2} = \dfrac{h(h-1)}{(h-2-n)(h+n)}a_h$,
   puis on cherchera une relation entre a_{n-2p} *et* a_n, *enfin on exprimera* a_{n-2p} *à l'aide de* $\binom{p}{n-p}$.