MPSI 3 - Fermat 06.10.21
2021-2022

Devoir à la maison n°2
CORRECTION

A. Relation trigonométrique

1. Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$, on a donc bien $\sin\theta \neq 0$:

$$\frac{\sin(4\theta)}{\sin\theta} = \frac{2\sin(2\theta)\cos(2\theta)}{\sin\theta} = \frac{4\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}{\sin\theta}$$

$$\boxed{\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 8\cos^3\theta - 4\cos\theta}$$

2. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0[\pi]$. On note $\overline{x} = \cos\theta$.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

(a)

$$\boxed{u_0 = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1 \qquad u_1 = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta = 2\overline{x}}$$

Puis

$$u_2 = \frac{\sin(3\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}{\sin\theta} = 2\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1) = 4\cos^2\theta - 1$$

$$\boxed{u_2 = 4\overline{x}^2 - 1}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On multiplie par $\sin\theta \neq 0$:

$$\sin(\theta) \times u_{n+1} = \sin((n+1)\theta) = \sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta)$$
$$\sin(\theta) \times u_{n-1} = \sin((n-1)\theta) = \sin(n\theta)\cos(\theta) - \cos(n\theta)\sin(\theta)$$

Si on additionne ces deux lignes :

$$\sin(\theta) \times (u_{n+1} + u_{n-1}) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta) = 2\sin(\theta) \times u_n \times \overline{x}$$

En divisant par $\sin\theta \neq 0$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2\overline{x}u_n - u_{n-1}.}$$

B. Construction de la famille de polynômes de Tchebychev de seconde espèce

1. Construction de (U_n).

(a) $U_2 : x \mapsto 2xU_1(x) - U_0(x) = 2x \times 2x - 1 = 4x^2 - 1$
$U_3 : x \mapsto 2xU_2(x) - U_1(x) = 2x \times (4x^2 - 1) - 2x = 8x^3 - 4x$
$U_4 : x \mapsto 2xU_3(x) - U_2(x) = 2x \times (8x^3 - 4x) - (4x^2 - 1) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ U_2(x) = 4x^2 - 1,\ U_3(x) = 8x^3 - 4x,\ U_4(x) = 16x^4 - 12c^2 + 1}$$

(b) Nous allons démontrer le résultat par récurrence, à deux termes.
Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$:
« U_n est polynomiale de degré n de coefficient dominant 2^n et ayant la parité de n »
Avant de faire cette démonstration, notons formellement l'équivalence :

$$f \text{ a la parité de } n \iff \forall\, x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-1)^n f(x)$$

- $U_0 : x \mapsto 1$ est bien une fonction polynomiale de degré 0 de coefficient dominant $2^n = 1$ et paire, comme 0
- $U_1 : x \mapsto 2x$ est bien une fonction polynomiale de degré 1 de coefficient dominant $2^1 = 2$ et impaire, comme 1

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.
U_n est polynomiale de degré n.
U_{n+1} est polynomiale de degré $n+1$ de terme dominant 2^{n+1},
donc $x \mapsto 2xU_{n+1}(x)$ est polynomiale de degré $(n+1)+1 = n+2$
de terme dominant $2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$
Alors U_{n+2} est également polynomiale de degré $(n+1)+1 = n+2$ de terme dominant $2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$ car le terme dominant de U_n n'interfère pas avec celui de U_{n+1}.
Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, (en exploitant $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$) :

$$\begin{aligned} U_{n+2}(-x) &= 2(-x)U_{n+1}(-x) - U_n(-x) = -2x(-1)^{n+1}U_{n+1}(x) - (-1)^n U_n(x) \\ &= (-1)^{n+2}[2xU_{n+1}(x) - U_n(x)] \qquad \text{car } (-1)^n = (-1)^{n+2} \\ &= (-1)^{n+2}U_{n+2}(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+2}$ est vérifiée.

$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n \text{ de coefficient dominant } 2^n \text{ et ayant la parité de } n.}$

(c) Le plus simple est de formaliser l'écriture des coefficients de U_n.
On note donc, pour tout $k \leqslant n$, $c_k(U_n)$, le coefficient de U_n situé devant x^k dans l'écriture polynomiale.

Ainsi, comme $U_4 : x \mapsto 16x^4 - 12x^2 + 1$, on a $c_3(U_4) = c_1(U_4) = 0$, $c_4(U_4) = 16$, $c_2(U_4) = -12$ et $c_0(U_4) = 1$...La relation de récurrence entre les polynômes (U_n) indique que :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R},\ U_{n+2}(x) &= 2xU_{n+1}(x) - U_n(x) = 2x\sum_{k=0}^{n+1} c_k(U_{n+1})x^k - \sum_{k=0}^{n} c_k(U_n)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} 2c_k(U_{n+1})x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k(U_n)x^k = \underbrace{\sum_{h=1}^{n+2} 2c_{h-1}(U_{n+1})x^h}_{h=k+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k(U_n)x^k \\ &= \sum_{h=1}^{n+2} \left(2c_{h-1}(U_{n+1}) - c_h(U_n)\right)x^h \end{aligned}$$

où l'on note que $c_{n+2}(U_n) = 0$ car $\deg U_n = n$...
On peut alors identifier les coefficients :

$$\boxed{c_k(U_{n+2}) = 2c_{k-1}(U_{n+1}) - c_k(U_n)}$$

On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}$: « $\forall\, k \in [\![0, n]\!], c_k(U_n) \in \mathbb{Z}$ ».
— $c_0(U_0) = 1$, donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
— $c_1(U_1) = 2$ et $c_0(U_1) = 0$, donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ sont vraies.
Soit $k \leqslant n+1$.

$$c_k(U_{n+2}) = 2\underbrace{c_{k-1}(U_{n+1})}_{\in\mathbb{Z}-\mathcal{Q}_{n+1}} - \underbrace{c_k(U_n)}_{\in\mathbb{Z}-\mathcal{Q}_n} \in \mathbb{Z}$$

Donc $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie.

$\boxed{\text{Tous les coefficients de } U_n \text{ sont des entiers relatifs.}}$

2. Autre expression.

(a) On démontre, de nouveau, ce résultat par une récurrence double.
On commence par fixer $\theta \not\equiv 0[\pi]$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$: « $U_n(\cos\theta) = u_n$ »
— $U_0(\cos\theta) = 1 = u_0$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
— $U_1(\cos\theta) = \cos\theta = u_1$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies.
D'après la première partie

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2\cos\theta u_{n+1} - u_n = 2\cos\theta U_{n+1}(\cos\theta) - U_n(\cos\theta) \quad \text{d'après } \mathcal{H}_{n+1}, \mathcal{H}_n \\ &= U_{n+2}(\cos\theta) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } \theta \not\equiv 0[\pi] : U_n(\cos\theta) = u_n}$

(b) $\boxed{U_n(0)=U_n(\cos\frac{\pi}{2})=\dfrac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}_{\{k\ \mid\ k\equiv 0[4]\}}(n)-\mathbf{1}_{\{k\ \mid\ k\equiv 2[4]\}}(n)=\left\{\begin{array}{rl}0 & \text{si } n \text{ est impair}\\ 1 & \text{si } n\equiv 0[4]\\ -1 & \text{si } n\equiv 2[4]\end{array}\right.}$

$1=\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta$ et les fonctions polynomiales sont continues,

donc $U_n(1)=\lim\limits_{\theta\to 0}U_n(\cos\theta)=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

Or $f:\theta\mapsto\sin(n+1)\theta$ et $g:\theta\sin\theta$ ont une limite nulle en 0.

Elles sont derivables et $f'(\theta)=-(n+1)\cos(n+1)\theta\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow}-(n+1)$, $g'(\theta)=-\cos(\theta)\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow}-1$

On peut appliquer la règle de Lhospital :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}=n+1$$

$$\boxed{U_n(1)=n+1}$$

$-1=\lim\limits_{\theta\to\pi}\cos\theta$ et les fonctions polynomiales sont continues,

donc $U_n(-1)=\lim\limits_{\theta\to\pi}U_n(\cos\theta)=\lim\limits_{\theta\to\pi}\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

Or $f:\theta\mapsto\sin(n+1)\theta$ et $g:\theta\sin\theta$ ont une limite nulle en π.

Et $f'(\theta)=-(n+1)\cos(n+1)\theta\underset{\theta\to\pi}{\longrightarrow}-(n+1)(-1)^{n+1}$, $g'(\theta)=-\cos(\theta)\underset{\theta\to\pi}{\longrightarrow}1$

On peut appliquer la règle de Lhospital :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}=-(-1)^{n+1}n+1$$

$$\boxed{U_n(1)=(-1)^n(n+1)}$$

(On aurait pu également exploiter la (im)parité de U_n).

(c) Soit $x\in]-1,1[$, on a vu que 1 et -1 n'étaient jamais racine de U_n.
On a donc les équivalences (en posant $\theta=\arccos x$ et donc $\theta\not\equiv 0[\pi]$) :

$$\begin{aligned} x \text{ est une racine de } U_n &\iff U_n(\cos\theta)=0\\ &\iff \sin((n+1)\theta)=0\iff(n+1)\theta\equiv 0[\pi]\\ &\iff \theta\equiv 0\left[\frac{\pi}{n+1}\right]\end{aligned}$$

Comme il ne faut pas tenir compte des situations $\theta\equiv 0[\pi]$, on trouve n racines distinctes : $x_k=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ pour $k\in[\![1,n]\!]$.
Il s'agit uniquement des racines localisées dans $]-1,1[$, mais U_n, de degré n, ne peut admettre d'autres racines.

$$\boxed{\mathcal{Z}(U_n)=\left\{x_k=\cos\frac{k\pi}{n+1},\ \text{pour } k\in[\![1,n]\!]\right\}}$$

(d) On suppose $n\geqslant 2$, montrer que U_n' admet $(n-1)$ racines réelles distinctes. Les déterminer

C. Propriétés différentielle

1. Intégrale
   (a) Soient $n,m\in\mathbb{N}$, deux entiers distincts. On rappelle la formule du cours : pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\sin(nt)\sin(mt)=\dfrac{1}{2}\cos((n-m)t)-\cos((n+m)t)$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t &=\int_0^\pi\frac{1}{2}\cos((n-m)t)-\cos((n+m)t)\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{n-m}}_{n-m\neq 0}\sin((n-m)t)-\frac{1}{n+1}\sin((n+m)t)\right]_0^\pi\\ &=\frac{1}{2(n-m)}(\sin(n-m)\pi-\sin 0)-\frac{1}{2(n+m)}(\sin((n+m)\pi)-\sin 0)=0\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\ n\neq m,\int_0^\pi\cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t=0}$$

(b) Soient $m, n \in \mathbb{N}$.
La fonction $\varphi : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\theta \mapsto \cos\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
On peut donc faire le changement de variable $t = \cos\theta = \varphi(\theta)$, on a alors $\mathrm{d}t = \sin\theta \mathrm{d}\theta$.
Puis, comme $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$ (car $\theta \in [0, \pi]$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} U_n(\cos\theta)U_m(\cos\theta)\sin\theta \times \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sin((n+1)\theta)\sin((m+1)\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Le cas $n \neq m$ a été étudié à la question précédente.
Pour $n = m$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2((n+1)\theta)\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2n+2)\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4(n+1)}\sin(2n+2)\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m\end{array}\right.}$$

2. Equation différentielle

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\psi_n \mapsto \sin\theta \times U_n(\cos\theta) = \sin((n+1)\theta)$.
Par composition, cette fonction est dérivable et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\psi_n'(\theta) = \cos\theta \times U_n(\cos\theta) - \sin^2\theta \times U_n'(\cos\theta) = (n+1)\cos((n+1)\theta)$$

(On rappelle que $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$).
Par composition, cette fonction est dérivable et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\psi_n''(\theta) &= -\sin\theta \times U_n(\cos\theta) - \sin\theta\cos\theta \times U_n'(\cos\theta) - 2\sin\theta\cos\theta \times U_n'(\cos\theta) + \sin^3\theta \times U_n''(\cos\theta) \\ &= -\sin\theta \times U_n(\cos\theta) - 3\sin\theta\cos\theta \times U_n'(\cos\theta) + \sin^3\theta \times U_n''(\cos\theta) = -(n+1)^2\sin((n+1)\theta)\end{aligned}$$

Pour $\theta \in]0, \pi[$, comme $\sin((n+1)\theta) = \sin\theta \times U_n(\cos\theta)$, en simplifiant par $\sin\theta (\neq 0)$:

$$-U_n(\cos\theta) - 3\cos\theta U_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta \times U_n''(\cos\theta) = -(n+1)^2 U_n(\cos\theta)$$

Et donc pour tout $x \in]-1, 1[$, avec $\theta = \arccos x$ donc $\cos\theta = x$ et $\sin^2\theta = 1 - x^2$:

$$-U_n(x) - 3xU_n'(x) + (1-x^2) \times U_n''(x) = -(n+1)^2 U_n(x)$$

Donc

$$\underbrace{[(n+1)^2 - 1]}_{=n^2+2n} U_n(x) - 3xU_n'(x) + (1-x^2)U_n''(x) = 0$$

$$\boxed{\forall\, x \in]-1, 1[, \qquad U_n \text{ est solution de } n(n+2)y - 3xy' + (1-x^2)y'' = 0}$$

(b) On fixe $n \in \mathbb{N}$. On note $a_k = c_k(U_n)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Les dérivations donnent : $U_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$ et $U_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2}$.
On a donc pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$n(n+2)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - 3x\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2} - x^2\sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2} = 0$$

$$n(n+2)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - 3\sum_{k=0}^{n} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^k = 0$$

On aurait envie de tout rassembler sous une même somme, puis factoriser par x^k, ce n'est pas possible pour la troisième somme. On commence donc finalement par faire un changement de variables dans cette somme ($h = k - 2$)
On a donc pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$n(n+2)\sum_{h=0}^{n} a_h x^h - 3\sum_{k=0}^{n} h x^h + \sum_{h=0}^{n-2}(h+2)(h+1)a_{h+2}x^h - \sum_{k=0}^{n} h(h-1)a_h x^h = 0$$

$$\sum_{h=0}^{n-2}[n(n+2)a_h-3ha_h+(h+2)(h+1)a_{h+2}-h(h-1)a_h]x^h$$
$$+\underbrace{[n(n+2)a_{n-1}-3(n-1)a_{n-1}-(n-1)(n-2)a_{n-1}]}_{h=n-1}+\underbrace{[n(n+2)a_n-3na_n-n(n-1)a_n}_{h=n}=0$$

L'écriture polynomiale est unique, on peut identifier (ici, il y a une infinité de racines : tous les nombres de $]-1,1[$) :

$$\begin{aligned}
\forall\ h\in[\![0,n-2]\!],\quad & n(n+2)a_h-3ha_h+(h+2)(h+1)a_{h+2}-h(h-1)a_h=0\\
&\qquad\Rightarrow[n(n+2)-3h-h(h-1)]a_h+(h+2)(h+1)a_{h+2}=0\\
&[n(n+2)-3(n-1)-(n-1)(n-2)]a_{n-1}\\
&\quad=[n(n+2)-(n-1)(3+n-2)]a_{n-1}=[n^2+2n-n^2+1]a_{n-1}=0\\
&\qquad\Rightarrow a_{n-1}=0\\
&[n(n+2)a_n-3na_n-n(n-1)]a_n=[n(n+2-3-n+1)]a_n=0\\
&\qquad\text{(logique)}
\end{aligned}$$

Finalement, on n'a pas de condition sur a_n (mais on sait déjà que $a_n=2^n$), on trouve $a_{n-1}=0$ et une relation de récurrence :

$$\forall\ k[\![0,n-2]\!],\qquad a_k=\frac{(k+2)(k+1)}{-n^2-2n+2k+k^2}a_{k+2}=\frac{(k+2)(k+1)}{(k-n)(k+n+2)}a_{k+2}$$

On a alors

$$\boxed{\forall\ h\in[\![2,n]\!],\qquad a_{h-2}=\frac{(h-1)h}{(h-n-2)(h+n)}a_h}$$

On a alors pour tout p tel que $n-2p\geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
a_{n-2p}\quad&=\overbrace{\frac{(n-2p+1)(n-2p+2)}{(n-2p-n)(n-2p+n+2)}\underbrace{a_{n-2p+2}}_{a_{n-2(p-1)}}}^{h=n-2p+2}=\frac{(n-2p+1)(n-2p+2)\cdots(n-1)n}{(-2p)2(n-p+1)\cdots(-2)(2n)}a_n\\
&=\frac{\dfrac{n!}{(n-2p)!}}{(-1)^p2^{2p}p!\dfrac{n!}{(n-p)!}}2^n=(-1)^p\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}2^{n-2p}=(-1)^p\binom{p}{n-p}2^{n-2p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc, pour tout entier } n\in\mathbb{N} : U_n : x\mapsto\sum_{0\leqslant p\leqslant\frac{n}{2}}(-1)^p\binom{p}{n-p}2^{n-2p}x^{n-2p}}$$