

### Devoir à la maison n°3

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**.

## Exercice

Considérons la fonction  $f$  **impaire** définie sur  $\mathbb{R}$  et dont la courbe représentative est donnée par le graphe ci-dessous. Lorsque la courbe « semble » passer par des points du quadrillage, elle passe en fait exactement par ces points.

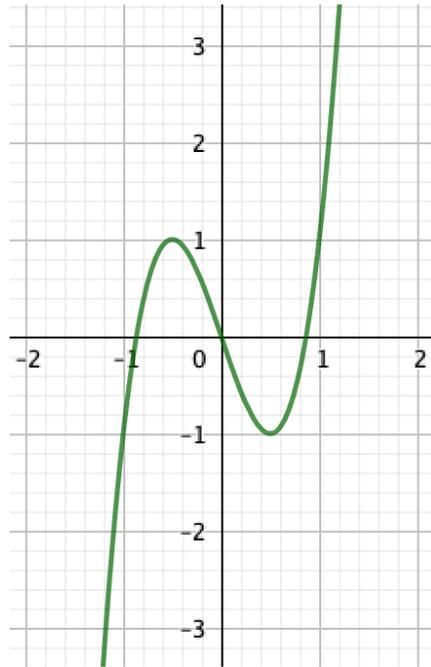


FIGURE 1 – Graphe de  $f$ .

Considérons la fonction  $g$  définie par l'expression  $g(x) = \arccos(f(x))$ .

1. (a) Déterminer, à l'aide d'une lecture graphique, le domaine de définition  $\mathcal{D}_g$  de  $g$ .  
 (b) Montrer que  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$ . On pourra calculer le sinus ou le cosinus du membre de gauche.  
 (c) Exprimer, pour  $x \in \mathcal{D}_g$ ,  $g(-x)$  en fonction de  $g(x)$ . Que peut-on en déduire quant aux symétries de la courbe représentative de  $g$ ?
2. On peut désormais utiliser que la fonction  $f$  est  $x \mapsto 4x^3 - 3x$ .  
 (a) Expliciter, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(3\theta)$  en fonction de  $f$  et de  $\cos \theta$  (*l'annonce du résultat sans preuve ne sera pas créditée de tous les points*).  
 (b) En déduire les expressions explicites de  $g(x)$  en fonction de  $x$ . On pourra introduire  $\theta = \arccos(x)$  et utiliser la question précédente.  
 (c) Tracer en couleur les courbes représentatives des fonctions  $\arccos$  et  $g$  sur  $\mathcal{D}_g$ . On précisera les transformations géométriques qui permettent de construire la graphe de  $g$  à partir de celui de  $\arccos$ .  
 (d) Calculer  $\int_{-1}^1 g(\theta) d\theta$  et  $\int_0^1 g(\theta) d\theta$ .
3. (a) Déterminer le domaine sur lequel s'applique le théorème de dérivabilité d'une composée de fonctions dérivables afin d'obtenir la dérivabilité de  $g$ .  
 (b) Calculer la dérivée de  $g$  sur ce domaine.  
 Afin de simplifier l'expression obtenue, on pourra développer le produit  $(4X - 1)^2(X - 1)$  et voir un lien avec  $g'(x)$ .  
 (c) Retrouver les résultats de la question précédente.

Feuille à rendre avec vos copies.

Nom :

Prénom :

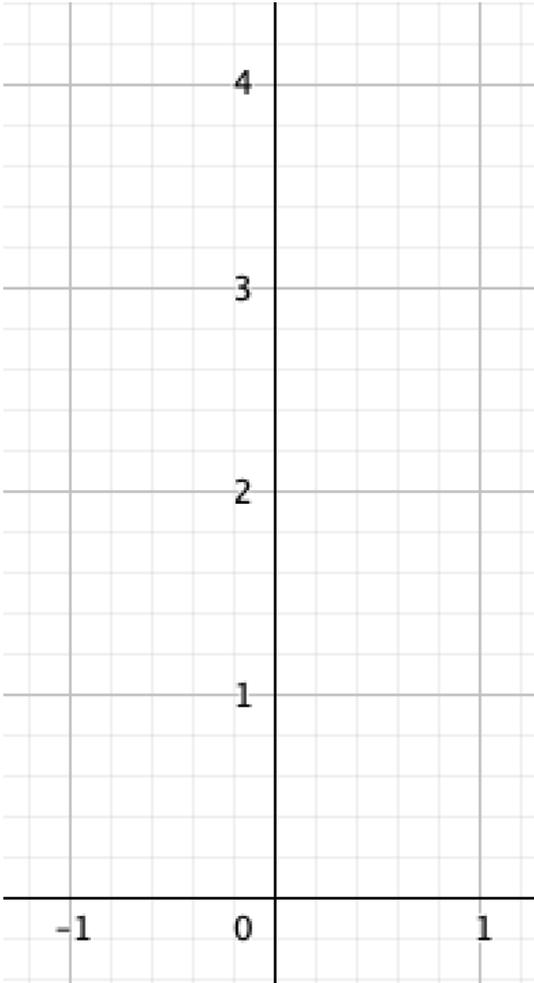


FIGURE 2 – Graphes de  $\arccos$  et de  $g : x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ .