Devoir surveillé n°2

Sujet donné le mercredi 13 octobre 2021, 3h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Exercice 1 (adapté du Concours Général 1989) /14

.1. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et k un entier naturel tel que $k \geqslant 2$.

(a) Posons $\lambda_k = \dfrac{(k-1)^{\frac{1}{k}}}{a^{\frac{1}{k}}}$. Comparer $\lambda_k a$ et $a^{1-\frac{1}{k}}$.

(b) Étudier les variations de la fonction f_k définie pour tout λ réel strictement positif par

$$f_k(\lambda) = \lambda a + \frac{1}{\lambda^{k-1}}$$

et en déduire que

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[\ ,\ a^{1-\frac{1}{k}} \leqslant \lambda a + \frac{1}{\lambda^{k-1}}$$

(c) L'inégalité ci-dessus démontrée pour $k \geqslant 2$ est-elle également valide pour $k = 1$?

.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.
Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^{1-\frac{1}{k}}$.

(a) Soit $\lambda > 0$. Montrer que

$$T \leqslant \lambda S + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{k-1}}$$

(b) En déduire que,

$$\forall \lambda \in]1, +\infty[\ ,\ T < \lambda S + \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

(c) Étudier les variations de la fonction g définie pour tout $\lambda \in]1, +\infty[$ par $g(\lambda) = \lambda S + \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$ puis en déduire une inégalité reliant $\sqrt{S}$ et $\sqrt{T}$.

Problème : Algorithmes

Le but de cet exercice est d'étudier un algorithme d'approximation de $\ln x$ (avec $x > 1$).
On utilisera les deux fonctions dont les expressions analytiques sont données par :

$$T(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad \text{et} \qquad S(x) = \frac{x^2-1}{2x}.$$

On admettra les trois résultats suivants *(comparables aux résultats sur les fonctions vus au lycée)* :
- si (a_n) est une suite croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors (a_n) est convergente et $\lim(a_n) \leqslant M$,
- si (a_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ, alors $(f(a_n))$ converge vers $f(\ell)$,
- si (a_n) converge vers ℓ et (b_n) converge vers $m \neq 0$, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ converge vers $\frac{\ell}{m}$,
- si (a_n) converge vers ℓ_1 et vers ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$ (on parle de l'unicité de la limite d'une suite sous réserve d'existence).

I Étude des fonctions T et S. Inégalités /15

I.1. Donner les ensembles de définition de T et S.

I.2. Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_S$, les courbes représentatives de T et S respectivement. Le cas échéant, on précisera les positions relatives courbe/asymptote.

I.3. Étudier les variations de T et S.
On terminera chaque étude par un tableau de variations **complet**.

I.4. Démontrer que, pour $x \geqslant 1$: $T(x) \leqslant 2T(\sqrt{x})$ et $2S(\sqrt{x}) \leqslant S(x)$.

On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x - T(x)$ et $g(x) = S(x) - \ln x$.

I.5. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)^2}{x\left(x^2+1\right)^2}$ et $g'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2x^2}$.
En déduire les variations de f et g sur $]0; +\infty[$.
Établir que, pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant T(x) \leqslant \ln x \leqslant S(x)$.
Quelles sont les inégalités obtenues pour $x \in]0, 1[$?

I.6. Tracer sur un même graphique les courbes $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_S$, ainsi que $y = \ln x$.

II Étude d'un algorithme qui converge vers $\ln x$ /16

Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement supérieur à 1.
Enfin, on note (u_n) la suite définie par $u_0 = x$ et la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

II.1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on préciser la raison, le premier terme et la limite.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de u_n en fonction de n et x. Quelle est la limite de (u_n) ?

II.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k = x^{2-(1/2)^n}$.

On définit les deux suites (T_n) et (S_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $T_n = 2^n T(u_n)$ et $S_n = 2^n S(u_n)$.

II.3. Déduire de la partie **??** les variations des suites (T_n) et (S_n).
Montrer également que pour tout entier n, $T_n \leqslant \ln x \leqslant S_n$

II.4. En déduire que (T_n) est une suite convergente.
On admettra qu'il en est de même de la suite (S_n). On note $t = \lim(T_n)$ et $s = \lim(S_n)$.

II.5. En utilisant la question **??**, comparer t, $\ln x$ et s.

II.6. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{u_n^2+1}{2u_n}$.
En étudiant la limite de cette suite, trouver une relation entre s et t.
Que vient-on de démontrer ?

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{S_n}{T_n}$.

II.7. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$(1)\ C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}} \qquad (2)\ S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}} \qquad (3)\ T_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{C_{n+1}}.$$

II.8. Écrire une fonction python `log_app(x, p)` qui prend en argument un réel `x` > 1 et un entier `p`, utilise les trois relations (1), (2), (3) et renvoie la liste constituée des deux éléments que sont

— la plus petite valeur de l'entier n telle que : $S_n - T_n < 10^{-p}$,

— la valeur approchée par excès de $\ln x$ ainsi obtenue.

III Trigonométrie /12

On reprend les mêmes suites :

$$(1)\ C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}} \qquad (2)\ S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}} \qquad (3)\ T_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{C_{n+1}}$$

avec pour valeur initiale respectivement C_0, S_0 et T_0 tels que $C_0 = \dfrac{S_0}{T_0}$ et $0 \leqslant S_0 < T_0$.

III.1. Montrer qu'il existe $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $C_0 = \cos\theta$.

III.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \cos\dfrac{\theta}{2^n}$.

III.3. (a) Montrer que $S_1 = \dfrac{2S_0}{\sin\theta}\sin\dfrac{\theta}{2}$ et $S_2 = \dfrac{4S_0}{\sin\theta}\sin\dfrac{\theta}{4}$.

(b) Conjecturer puis démontrer des expressions de S_n et T_n en fonction θ, 2^n, S_0 et des fonctions trigonométriques bien connues.

III.4. En déduire que (S_n) et (T_n) convergent toutes les deux vers $\dfrac{S_0 \arccos C_0}{\sqrt{1-C_0^2}}$.

On note pour tout entier n, $W_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} C_k$.

III.5. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \dfrac{S_0}{S_n}$.

III.6. En déduire que (W_n) converge. Quelle est sa limite ?

III.7. En déduire la formule de Viète :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots$$

Correction.

Exercice 1 (adapté du Concours Général 1989) /14

.1. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et k un entier naturel tel que $k \geqslant 2$.

(a) Posons $\lambda_k = \dfrac{(k-1)^{\frac{1}{k}}}{a^{\frac{1}{k}}}$. Comparer $\lambda_k a$ et $a^{1-\frac{1}{k}}$.

Par hypothèse, $k \geqslant 2$ donc $(k-1) \geqslant 1$ donc en prenant la puissance $\dfrac{1}{k} > 0$, par croissance de la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{k}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $(k-1)^{\frac{1}{k}} \geqslant 1^{\frac{1}{k}} = 1$ si bien que

$$\lambda_k = \frac{(k-1)^{\frac{1}{k}}}{a^{\frac{1}{k}}} \geqslant \frac{1}{a^{\frac{1}{k}}}$$

d'où, après multiplication par $a \geqslant 0$ (ce qui préserve le sens des inégalités), /1,5

$$\boxed{\lambda_k a \geqslant a^{1-\frac{1}{k}}}$$

(b) Étudier les variations de la fonction f_k définie pour tout λ réel strictement positif par

$$f_k(\lambda) = \lambda a + \frac{1}{\lambda^{k-1}}$$

et en déduire que

$$\forall \lambda \in]0,+\infty[\ ,\ a^{1-\frac{1}{k}} \leqslant \lambda a + \frac{1}{\lambda^{k-1}} \tag{1}$$

- $\star$ $\lambda \mapsto \lambda a$ est une fonction affine sur $]0,+\infty[$ donc dérivable sur $]0,+\infty[$,
- $\star$ $\lambda \mapsto \lambda^{1-k}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction puissance entière,

donc la fonction f_k est dérivable sur $]0,+\infty[$ (combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$). /1

$$\forall \lambda \in]0,+\infty[\ ,\ f_k'(\lambda) = a - \frac{k-1}{\lambda^k}$$

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f_k'(\lambda) = 0 \quad &\iff \quad a = \frac{k-1}{\lambda^k} \\ &\iff \quad \lambda^k = \frac{k-1}{a} \\ &\iff \quad \lambda = \left(\frac{k-1}{a}\right)^{\frac{1}{k}} = \lambda_k \end{aligned}$$

/0,5

car $t \mapsto t^k$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$
On résout de même

$$f_k'(\lambda) < 0 \iff \lambda < \lambda_k \qquad \text{et} \qquad f_k'(\lambda) > 0 \iff \lambda > \lambda_k$$

d'où le tableau des variations de f_k :

λ	0		λ_k	$+\infty$
$f_k'(\lambda)$	$\Vert$	$-$	0	$+$
f_k	$\Vert$	$\searrow$	$f_k(\lambda_k)$	$\nearrow$

/1

On en déduit que

$$\forall \lambda \in]0,+\infty[\ ,\ \lambda a + \frac{1}{\lambda^{k-1}} = f_k(\lambda) \geqslant f_k(\lambda_k)$$

or, en utilisant l'inégalité établie dans la première question

$$f_k(\lambda_k) = \lambda_k a + \underbrace{\frac{1}{\lambda_k^{k-1}}}_{\geqslant 0 \text{ car } \lambda_k > 0} \geqslant \lambda_k a \underbrace{\geqslant}_{\text{quest. 1}} a^{1-\frac{1}{k}}$$

/1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall \lambda \in]0,+\infty[\ ,\ \lambda a + \frac{1}{\lambda^{k-1}} \geqslant a^{1-\frac{1}{k}}.}$$

(c) L'inégalité ci-dessus démontrée pour $k \geqslant 2$ est-elle également valide pour $k = 1$?

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$ fixé quelconque.

Pour $k = 1$, observons que $a^{1-\frac{1}{1}} = a^0 = 1$ et que $\lambda a + \dfrac{1}{\lambda^{1-1}} = \lambda a + 1 \geqslant 1 = a^0$ (car $\lambda a \geqslant 0$)

donc $a^{1-\frac{1}{1}} \leqslant \lambda a + \dfrac{1}{\lambda^{1-1}}$,

donc l'inégalité est également vraie pour $k = 1$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall \lambda \in]0,+\infty[\ ,\ a^{1-\frac{1}{1}} \leqslant \lambda a + \frac{1}{\lambda^{1-1}}.}$$

.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Posons $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $T = \sum_{k=1}^{n} a_k^{1-\frac{1}{k}}$.

(a) Soit $\lambda > 0$. Montrer que

$$T \leqslant \lambda S + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{k-1}} \tag{2}$$

Soit $\lambda > 0$ fixé quelconque.

- $\star$ Soit $k \in [\![2, n]\!]$ fixé quelconque.
  Appliquons l'inégalité (**??**) établie précédemment pour
  — $k \leftarrow k$ (autorisé car $k \geqslant 2$),
  — $a \leftarrow a_k$ (autorisé car $a_k > 0$),
  d'où

$$a_k^{1-\frac{1}{k}} \leqslant \lambda a_k + \frac{1}{\lambda^{k-1}} \tag{3}$$

- $\star$ pour $k = 1$, nous avons vu dans que l'inégalité (**??**) est encore vraie ce qui permet de l'appliquer pour $a \leftarrow a_1$:

$$a_1^{1-\frac{1}{1}} \leqslant \lambda a_1 + \frac{1}{\lambda^{1-1}} \tag{4}$$

Sommons l'inégalité (**??**) (cas $k = 1$) et les $n - 1$ inégalités (**??**) (cas $k \in [\![2, n]\!]$) pour obtenir /1,5

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{1-\frac{1}{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda a_k + \frac{1}{\lambda^{k-1}} \right) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{k-1}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ T \leqslant \lambda S + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{k-1}}.}$$

(b) En déduire que,

$$\forall \lambda \in]1,+\infty[\ ,\ T < \lambda S + \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Soit $\lambda \in]1,+\infty[$ fixé quelconque.

Reprenons la somme dans le terme de droite de l'inégalité obtenue dans la question précédente : il s'agit de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\lambda}$ et de premier terme 1,

or $\lambda > 1$ donc $\dfrac{1}{\lambda} \neq 1$ si bien que nous pouvons appliquer la formule habituelle :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{k-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n}{1 - \frac{1}{\lambda}} = \lambda \frac{1 - \frac{1}{\lambda^n}}{\lambda - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} - \underbrace{\frac{\frac{1}{\lambda^{n-1}}}{\lambda - 1}} < \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$ /1,5

Ainsi, en utilisant cette inégalité stricte dans l'inégalité (**??**), on obtient

$$\boxed{\forall \lambda \in]1,+\infty[\ , \ T < \lambda S + \frac{\lambda}{\lambda - 1}.}$$

(c) Étudier les variations de la fonction g définie pour tout $\lambda \in]1,+\infty[$ par $g(\lambda) = \lambda S + \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ puis en déduire une inégalité reliant $\sqrt{S}$ et $\sqrt{T}$.

- $\star$ $\lambda \mapsto \lambda S$ est une fonction affine sur $]1,+\infty[$ donc dérivable sur $]1,+\infty[$,
- $\star$ $\lambda \mapsto \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que quotient d'une fonction dérivable sur $]1,+\infty[$ par une fonction dérivable sur $]1,+\infty[$ qui ne s'annule pas,

donc la fonction g est dérivable sur $]1,+\infty[$ (combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $]1,+\infty[$).

$$\forall \lambda \in]1,+\infty[\ , \ g'(\lambda) = S + \frac{(\lambda-1)-\lambda}{(\lambda-1)^2} = S - \frac{1}{(\lambda-1)^2}$$

Soit $\lambda \in]1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
g'(\lambda) > 0 \quad & \iff \quad S > \frac{1}{(\lambda-1)^2} \\
& \iff \quad \sqrt{S} > \frac{1}{|\lambda-1|} \quad \text{car } \sqrt{\cdot} \text{ est strictement croissante} \\
& \iff \quad \sqrt{S} > \frac{1}{\lambda-1} > 0 \quad \text{car } \lambda \in]1,+\infty[\\
& \iff \quad \lambda - 1 > \frac{1}{\sqrt{S}} \quad \text{(fonction inverse strict. décroissante sur }]0,+\infty[) \\
& \iff \quad \lambda > 1 + \frac{1}{\sqrt{S}}
\end{aligned}$$

On résout de même

$$g'(\lambda) < 0 \iff \lambda < 1 + \frac{1}{\sqrt{S}} \qquad \text{et} \qquad g'(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 + \frac{1}{\sqrt{S}}$$

d'où le tableau des variations de g :

λ	1		$1+\frac{1}{\sqrt{S}}$		$+\infty$
$g'(\lambda)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$	$\searrow$	$g\left(1+\frac{1}{\sqrt{S}}\right)$	$\nearrow$	

/2

On en déduit que

$$\forall \lambda \in]1,+\infty[\ , \ g(\lambda) \geqslant g\left(1 + \frac{1}{\sqrt{S}}\right)$$

or

$$g\left(1+\frac{1}{\sqrt{S}}\right) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{S}}\right) S + \frac{1+\frac{1}{\sqrt{S}}}{1+\frac{1}{\sqrt{S}}-1} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{S}}\right)\left(S+\sqrt{S}\right) = S\left(1+\frac{1}{\sqrt{S}}\right)^2$$

Particularisons pour $\lambda \leftarrow 1 + \dfrac{1}{\sqrt{S}}$ (autorisé car cette valeur est > 1) la majoration établie dans la question précédente :

$$T < g\left(1+\frac{1}{\sqrt{S}}\right) = S\left(1+\frac{1}{\sqrt{S}}\right)^2$$

En prenant l'image par la racine carrée (fonction strictement croissante),

$$\sqrt{T} < \sqrt{S}\left(1+\frac{1}{\sqrt{S}}\right) = \sqrt{S} + 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sqrt{T} < \sqrt{S} + 1.}$$ /2

Problème : Algorithmes

I Etude des fonctions T et S. Inégalités /15

I.1. Donner les ensembles de définition de T et S

Aucun problème de définition pour T car son dénominateur ne s'annule jamais.
Celui de S s'annule uniquement en 0. /1,5

$$\boxed{\mathcal{D}_T = \mathbb{R} \quad \mathcal{D}_S = \mathbb{R}^*}$$

I.2. Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_S$, les courbes représentatives de T et S respectivement. Le cas échéant, on précisera les positions relatives courbe/asymptote.

- $\mathcal{C}_T$:

$$T(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1^- \quad (\text{car lorsque } x \to \pm\infty,\ 0 < 1 - \frac{1}{x^2} < 1 + \frac{1}{x^2}\ )$$

Donc /1

$\boxed{\mathcal{C}_T \text{ admet en } +\infty \text{ et } -\infty \text{ une asymptote horizontale d'équation } y = 1 \text{ et la courbe est en-dessous de son asymptote.}}$

- $\mathcal{C}_S$:

$$S(x) = \frac{x^2-1}{2x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

$$S(x) = \frac{x^2-1}{2x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$$

/1

$$\boxed{\mathcal{C}_S \text{ admet en 0 une asymptote verticale d'équation } x = 0.}$$

$$S(x) = \frac{x^2-1}{2x} = x\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$$

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

$$S(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x^2-1-x^2}{2x} = \frac{-1}{2x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0^+ & \text{si } x \to -\infty \\ 0^- & \text{si } x \to +\infty \end{cases}$$

Donc /1

$$\boxed{\mathcal{C}_S \text{ admet en } -\infty \text{ une asymptote oblique d'équation } y = \frac{1}{2}x \text{ et } \mathcal{C}_S \text{ est au-dessus de l'asymptote,}}$$

$$\boxed{\mathcal{C}_S \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote oblique d'équation } y = \frac{1}{2}x \text{ et } \mathcal{C}_S \text{ est en-dessous de l'asymptote.}}$$

I.3. Étudier les variations de T et S.
On terminera chaque étude par un tableau de variations complet.

T et S sont des fractions rationnelles, dérivables sur leur ensemble de définition.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

/1

$$T'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$$

Puis $T(0) = \dfrac{-1}{1} = -1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$S'(x) = \frac{2x \times 2x - 2(x^2-1)}{(2x)^2} = \frac{2x^2+2}{4x^2} = \frac{x^2+1}{2x^2} \geqslant 0$$

On a donc les tableaux de variations suivants (les limites de S et T ont été calculées dans la question précédente) : /1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
T	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
S	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

I.4. Démontrer que, pour $x \geqslant 1$: $T(x) \leqslant 2T(\sqrt{x})$ et $2S(\sqrt{x}) \leqslant S(x)$.

Pour tout $x \geqslant 1$:

$$T(x) - 2T(\sqrt{x}) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2(x-1)}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)^2 - 2(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(x-1)\overbrace{(x^2+2x+1-2x^2-2)}^{=-x^2+2x-1=-(1-x)^2}}{(x+1)(x^2+1)}$$

donc /1,5

$$T(x) - 2T(\sqrt{x}) = \frac{(1-x)^3}{(x+1)(x^2+1)} \leqslant 0 \quad \text{car } 1-x \leqslant 0 \text{ et l'exposant est impair.}$$

$$2S(\sqrt{x}) - S(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} - \frac{x^2-1}{2x} = \frac{x-1}{2x}\left(2\sqrt{x} - x - 1\right) = \frac{-(x-1)(\sqrt{x}-1)^2}{2x} \leqslant 0 \quad \text{car } x-1 \geqslant 0$$

/1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geqslant 1 : T(x) \leqslant 2T(\sqrt{x}) \text{ et } 2S(\sqrt{x}) \leqslant S(x).}$$

I.5. On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x - T(x)$ et $g(x) = S(x) - \ln x$.
Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)^2}{x\left(x^2+1\right)^2}$ et $g'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2x^2}$.
En déduire les variations de f et g sur $]0; +\infty[$.
Établir que, pour tout $x \geqslant 1$, $0 \geqslant T(x) \geqslant \ln x \geqslant S(x)$.
Quelles sont les inégalités obtenues sur $]0, 1[$?

En tant que combinaisons linéaires de fonctions dérivables, f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - T'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{x(1+x^2)^2}$$

$$g'(x) = S'(x) - \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{2x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-2x+1}{2x^2} = \frac{(x-1)^2}{2x^2}$$

On a donc pour tout $x > 0$, $f'(x) \geqslant 0$ et $g'(x) \geqslant 0$. /1

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont croissantes sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Puis comme $f(1) = \ln 1 - T(1) = 0$ et $g(1) = S(1) - \ln 1 = 0$, on a donc (T croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$\forall\ x \geqslant 1, \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) \geqslant f(1) = 0 & \Longrightarrow & \ln x \geqslant T(x) \\ g(x) \geqslant f(1) = 0 & \Longrightarrow & \ln x \leqslant S(x) \\ T(x) \geqslant T(1) = 0 & \Longrightarrow & T(x) \geqslant 0 \end{array} \right.$$

$$\forall\ x \leqslant 1, \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) \leqslant f(1) = 0 & \Longrightarrow & \ln x \leqslant T(x) \\ g(x) \leqslant f(1) = 0 & \Longrightarrow & \ln x \geqslant S(x) \\ T(x) \leqslant T(1) = 0 & \Longrightarrow & S(x) \geqslant 0 \end{array} \right.$$

/1,5

$$\boxed{\forall\ x \geqslant 1\ :\ 0 \leqslant T(x) \leqslant \ln x \leqslant S(x) \qquad \forall\ x \leqslant 1\ :\ S(x) \leqslant \ln x \leqslant T(x) \leqslant 0}$$

I.6. Tracer sur un même graphique les courbes $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_S$, ainsi que $y = \ln x$.

Voir la figure **??**. /3

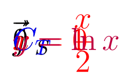

FIGURE 1 – Graphes des fonctions S, T et $\ln$.

II Étude d'un algorithme qui converge vers $\ln x$ /16

Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement supérieur à 1.
Enfin, on note (u_n) la suite définie par $u_0 = x$ et la relation de récurrence : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

II.1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on préciser la raison, le premier terme et la limite.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de u_n en fonction de n et x. Quelle est la limite de (u_n) ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\sqrt{u_n} = \dfrac{\ln u_n}{2} = \dfrac{1}{2} v_n$, /1

$$\boxed{\text{donc la suite } v \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } v_0 = \ln x : \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{\ln x}{2^n}.}$$

Sachant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition, $v_n = \ln u_n \iff u_n = e^{v_n}$, /1

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp\frac{\ln x}{2^n} = x^{1/2^n}.}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln x}{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} e^t = 1$ donc, par composition des limites, /0,5

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

II.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k = x^{2-(1/2)^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Utilisons la propriété de morphisme de l'exponentielle :

$$\prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{k=0}^{n} e^{\ln x/2^k} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln x}{2^k}\right) = \exp\left(\ln x \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) = \exp\left(\ln x \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) = x^{2-2\times\frac{1}{2^{n+1}}} = x^{2-(1/2)^n}$$

/1,5

$$\boxed{\text{Ainsi,pour tout } n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n} u_k = x^{2-(1/2)^n}.}$$

On définit les deux suites (T_n) et (S_n) par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $T_n = 2^n T(u_n)$ et $S_n = 2^n S(u_n)$.

II.3. Déduire de la partie **??** les variations des suites (T_n) et (S_n).
Montrer également que pour tout entier n, $T_n \leqslant \ln x \leqslant S_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

Appliquons les inégalités de la question **??** pour $x \leftarrow u_n$ (ce qui est autorisé car $x > 1 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{2^n} > 0 \Rightarrow u_n = e^{\frac{\ln x}{2^n}} > 1$) :

$$T(u_n) \leqslant 2T(\sqrt{u_n}) \quad \text{et} \quad 2S(\sqrt{u_n}) \leqslant S(u_n)$$

ce qui donne, après multiplication par 2^n et utilisation de la relation $\sqrt{u_n} = u_{n+1}$,

$$T_n = 2^n T(u_n) \leqslant 2^{n+1} T(u_{n+1}) = T_{n+1} \quad \text{et} \quad S_{n+1} = 2^{n+1} S(u_{n+1}) \leqslant 2^n S(u_n) = S_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (T_n) \text{ est croissante et } (S_n) \text{ est décroissante.}}$$ /1,5

Appliquons de même l'encadrement de la question **??** pour $x \leftarrow u_n$ (ce qui est autorisé car $x > 1 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{2^n} > 0 \Rightarrow u_n = e^{\frac{\ln x}{2^n}} \geqslant 1$) :

$$T(u_n) \leqslant \ln u_n \leqslant S(u_n) \qquad \text{d'où, puisque } u_n = x^{1/2^n}, \qquad T(u_n) \leqslant \frac{\ln x}{2^n} \leqslant S(u_n)$$

d'où, après multiplication par 2^n,

$$T_n = 2^n T(u_n) \leqslant \ln x \leqslant 2^n S(u_n) = S_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leqslant \ln x \leqslant S_n.}$$ /1,5

II.4. En déduire que (T_n) est une suite convergente.
On admettra qu'il en est de même de la suite (S_n). On note $t = \lim(T_n)$ et $s = \lim(S_n)$.

D'après la question précédente, la suite (T_n) est
- ⋆ croissante,
- ⋆ majorée par $\ln x$,

/1

$$\boxed{\text{donc la suite } (T_n) \text{ est convergente.}}$$

II.5. En utilisant la question **??**, comparer t, $\ln x$ et s.

Reprenons l'encadrement établi dans la question **??** :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ T_n \leqslant \ln x \leqslant S_n$$

Les 3 membres de cet encadrement convergent respectivement vers t, $\ln x$ (la suite est constante !) et s donc, en passant à la limite successivement sur les deux inégalités, on obtient $t \leqslant \ln x$ et $\ln x \leqslant s$. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi, } t \leqslant \ln x \leqslant s.}$$

II.6. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{u_n^2+1}{2u_n}$.
En étudiant la limite de cette suite, trouver une relation entre s et t.
Que vient-on de démontrer ?

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{2^n S(u_n)}{2^n T(u_n)} = \frac{S(u_n)}{T(u_n)} = \frac{\frac{u_n^2-1}{2u_n}}{\frac{u_n^2-1}{u_n^2+1}} = \frac{u_n^2+1}{2u_n}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{S_n}{T_n} = \frac{u_n^2+1}{2u_n}.}$$ /1

D'après la question **??**, la suite (u_n) converge vers 1 donc la suite $\left(\dfrac{S_n}{T_n}\right) = \left(\dfrac{u_n^2+1}{2u_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1+1}{2\times 1} = 1$.

Par ailleurs, en tant que quotient de la suite (S_n) qui converge vers s par la suite (T_n) qui converge vers t et sachant que $t \neq 0$ (car (T_n) est croissante donc en passant à la limite sur l'inégalité $T_0 \leqslant T_n$, $T_0 \leqslant t$, or $x > 1$ donc $T_0 = T(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} > 0$ d'où $t > 0$), la suite $\left(\dfrac{S_n}{T_n}\right)$ converge vers $\dfrac{s}{t}$.

Par unicité de la limite, $1 = \dfrac{s}{t}$ donc $s = t$,
or nous avons prouvé dans la question **??** que $t \leqslant \ln x \leqslant s$, /1,5

$$\boxed{\text{donc } s = t = \ln x.}$$

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{S_n}{T_n}$.

II.7. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

(1) $C_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+C_n}{2}}$ (2) $S_{n+1} = \dfrac{S_n}{C_{n+1}}$ (3) $T_{n+1} = \dfrac{S_{n+1}}{C_{n+1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
D'une part,

$$C_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{T_{n+1}} = \frac{2^{n+1}S(\sqrt{u_n})}{2^{n+1}T(\sqrt{u_n})} = \frac{\frac{u_n-1}{2\sqrt{u_n}}}{\frac{u_n-1}{u_n+1}} = \frac{u_n+1}{2\sqrt{u_n}}$$

D'autre part, en reprenant le calcul de $C_n = \dfrac{S_n}{T_n}$ effectué dans la question **??**,

$$\sqrt{\frac{1+C_n}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{u_n^2+1}{2u_n}\right)} = \sqrt{\frac{u_n^2+2u_n+1}{4u_n}} = \sqrt{\frac{(u_n+1)^2}{4u_n}} = \frac{|u_n+1|}{2\sqrt{u_n}} = \frac{u_n+1}{2\sqrt{u_n}} \quad u_n \geqslant 0 \text{ par déf. donc } 1+u_n \geqslant 0.$$

$$\boxed{\text{Par conséquent, } C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}}.}$$ /1,5

Par définition,

$$S_{n+1} = 2^{n+1}S(\sqrt{u_n}) = 2^{n+1}\frac{u_n-1}{2\sqrt{u_n}} = 2^n\frac{u_n-1}{\sqrt{u_n}}$$

or, en reprenant l'expression de C_{n+1} obtenue ci-dessus,

$$\frac{S_n}{C_{n+1}} = \frac{2^n S(u_n)}{\frac{u_n+1}{2\sqrt{u_n}}} = \frac{2^n\frac{u_n^2-1}{2u_n}}{\frac{u_n+1}{2\sqrt{u_n}}} = \frac{2^n\frac{(u_n-1)(u_n+1)}{2u_n}}{\frac{u_n+1}{2\sqrt{u_n}}} = 2^n\frac{u_n-1}{2u_n}\times 2\sqrt{u_n} = 2^n\frac{u_n-1}{\sqrt{u_n}}$$

$$\boxed{\text{Par conséquent, } S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}}.}$$

Par définition, $C_{n+1} = \dfrac{S_{n+1}}{T_{n+1}}$, /1,5

$$\boxed{\text{donc } T_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{C_{n+1}}.}$$

II.8. Écrire une fonction python `log_app(x, p)` qui prend en argument un réel `x` > 1 et un entier `p`, utilise les trois relations (1), (2), (3) et renvoie la liste constituée des deux éléments que sont

— la plus petite valeur de l'entier n telle que : $S_n - T_n < 10^{-p}$,

— la valeur approchée par excès de $\ln x$ ainsi obtenue.

/1

III Trigonométrie /12

On reprend les mêmes suites :

(1) $C_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+C_n}{2}}$ (2) $S_{n+1} = \dfrac{S_n}{C_{n+1}}$ (3) $T_{n+1} = \dfrac{S_{n+1}}{C_{n+1}}$

avec pour valeur initiale respectivement C_0, S_0 et T_0 tels que $C_0 = \dfrac{S_0}{T_0}$ et $0 \leqslant S_0 < T_0$.

III.1. Montrer qu'il existe $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $C_0 = \cos\theta$.

Notons que $0 \leqslant S_0 < T_0$, donc $C_0 = \dfrac{S_0}{T_0} \in [0, 1[$.

Posons tout simplement $\theta = \arccos C_0$.

Cela est possible car $C_0 \in [0,1[\subset \mathcal{D}_{\text{arccos}}$ (le domaine de définition de arccos est $[-1,1]$).

Dans ce cas $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] = \arccos([0,1[)$, car arccos est décroissante. /1

$$\boxed{\text{Il existe } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } C_0 = \cos\theta.}$$

III.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \cos\dfrac{\theta}{2^n}$.

On rappelle que $\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$, donc $|\cos u| = \sqrt{\dfrac{\cos 2u + 1}{2}}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $C_n = \cos\dfrac{\theta}{2^n}$ ».

— $C_0 = \cos\theta = \cos\dfrac{\theta}{2^0}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Alors $C_{n+1} = \sqrt{\dfrac{C_n + 1}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2^n} + 1}{2}} = \left|\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right|$, d'après la formule rappelée plus haut.

Or $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\dfrac{\theta}{2^{n+1}} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right] \subset \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}} \geqslant 0$.

Et donc $C_{n+1} = \cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$. Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. /1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ C_n = \cos\frac{\theta}{2^n}.}$$

III.3. (a) Montrer que $S_1 = \dfrac{2S_0}{\sin\theta}\sin\dfrac{\theta}{2}$ et $S_2 = \dfrac{4S_0}{\sin\theta}\sin\dfrac{\theta}{4}$.

Notons d'abord que $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

— donc $\sin\theta \neq 0$,

— donc, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{\theta}{2^n} \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, donc $\cos\dfrac{\theta}{2^n} \neq 0$.

Rappelons la formule que nous allons utiliser : $\sin(2u) = 2\sin u\cos u$.

$$S_1 = \frac{S_0}{C_1} = \frac{S_0}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{S_0 \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{S_0}{\frac{1}{2}\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2S_0}{\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2}.$$

$$S_2 = \frac{S_1}{C_2} = \frac{2S_0}{\sin\theta} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2^2}} = \frac{2S_0}{\sin\theta} \frac{2\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}}{\cos\frac{\theta}{4}} = \frac{4S_0}{\sin\theta}\sin\frac{\theta}{4}\ .$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } S_1 = \frac{2S_0}{\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2} \text{ et } S_2 = \frac{4S_0}{\sin\theta}\sin\frac{\theta}{4}.}$$ /1,5

(b) Conjecturer puis démontrer des expressions de S_n et T_n en fonction θ, 2^n, S_0 et des fonctions trigonométriques bien connues.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$: « $S_n = 2^n \dfrac{S_0}{\sin\theta} \times \sin\dfrac{\theta}{2^n}$ ».

— $2^0 \dfrac{S_0}{\sin\theta} \times \sin\dfrac{\theta}{2^0} = S_0$. Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie. Alors :

$$S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}} = 2^n \frac{S_0}{\sin\theta} \frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2^n \frac{S_0}{\sin\theta} \times \frac{2\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2^{n+1}\frac{S_0}{\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

Donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie. /2,5

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = 2^n \frac{S_0}{\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2^n} \text{ et } T_n = \frac{S_n}{C_n} = 2^n\frac{S_0}{\sin\theta}\tan\frac{\theta}{2^n}.}$$

Rmq : on aurait aussi pu utiliser un télescopage $\dfrac{S_0}{S_n} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_{k+1}} = \prod_{k=0}^{n-1} C_k \ldots$

III.4. En déduire que (S_n) et (T_n) convergent toutes les deux vers $\dfrac{S_0 \arccos C_0}{\sqrt{1-C_0^2}}$.

On a vu dans le cours que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$.

Donc en particulier si $(h_n) \to 0$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin h_n}{h_n} = 1$, par composition.

Or la suite $(h_n) = \left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ converge bien vers 0, donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n\frac{S_0}{\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\theta S_0}{\sin\theta}\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} = \frac{\theta S_0}{\sin\theta}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(h_n)}{h_n} = \frac{\theta S_0}{\sin\theta}$$

De même $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h} = 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n\frac{S_0}{\sin\theta}\tan\frac{\theta}{2^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\theta S_0}{\sin\theta}\frac{\tan\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} = \frac{\theta S_0}{\sin\theta}\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan(h_n)}{h_n} = \frac{\theta S_0}{\sin\theta}$$

Enfin, comme $\theta = \arccos C_0$ (Question 1) : /2

$$\boxed{(S_n) \text{ et } (T_n) \text{ convergent toutes les deux vers } \frac{\theta S_0}{\sin\theta} = \frac{S_0\arccos C_0}{\sqrt{1-C_0^2}}.}$$

Rmq : autre argument pour déduire la convergence de (T_n) de celle de (S_n) : utilisons la relation de récurrence : $T_n = \dfrac{S_n}{C_n}$ quotient de la suite convergente (S_n) par la suite $(C_n) = \left(\cos\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ qui converge vers 1 ($\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x = 1$) donc (T_n) converge et sa limite est la même que celle de (S_n).

On note pour tout entier n, $W_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} C_k$.

III.5. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \dfrac{S_0}{S_n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par télescopage : /1

$$\boxed{W_n = \prod_{k=1}^{n} C_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{S_k} = \frac{S_0}{S_n} = \frac{S_0}{S_n}}$$

III.6. En déduire que (W_n) converge. Quelle est sa limite ?

Nous savons que (S_n) converge vers $\dfrac{\theta S_0}{\sin\theta} = \dfrac{S_0 \arccos C_0}{\sqrt{1-C_0^2}}$, donc par division de suite convergente : /1

$$\boxed{(W_n) \text{ converge et } \lim(W_n) = \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sqrt{1-C_0^2}}{\arccos C_0}.}$$

III.7. En déduire la formule de Viète :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots$$

Considérons $C_0 = 0$, on a donc $\theta = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\sin\theta = 1$.

La limite de (W_n) est alors $\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}$ où

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_n = \prod_{k=1}^{n} C_k \quad \text{et} \quad C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}}$$

Dans ce cas $C_1 = \sqrt{\dfrac{1+0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $C_2 = \sqrt{\dfrac{1+C_1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}$ et $C_3 = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}\dots$

On retrouve donc la formule de Viète qui annonce la limite de (W_n) : /1,5

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots}$$
