

DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Sujet donné le samedi 18 septembre 2021, 3h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

PROBLÈME : CALCUL DIFFÉRENTIEL DISCRET

On note

- E l'ensemble des suites numériques à valeurs dans $\mathbb{R}$, indexées par $\mathbb{N}$,
- pour $(u, v) \in E^2$, $u \geq v$ (ou $v \leq u$) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$,
- pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\tilde{c}$ la suite constante de valeur c ,
- pour $(u, v) \in E^2$, $u \times v$ la suite de E dont le terme d'indice n est $u_n \times v_n$,
- pour $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, λu ou $\lambda \times u$ la suite de E dont le terme d'indice n est $\lambda \times u_n$.

On considère les deux applications suivantes définies sur E

$$\begin{array}{ccc} \Delta : E & \longrightarrow & E \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \underbrace{(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}}_{\substack{\text{le terme d'indice } n \\ \text{de } \Delta u \text{ est } u_{n+1} - u_n}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tau : E & \longrightarrow & E \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \underbrace{(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}}_{\substack{\text{le terme d'indice } n \\ \text{de } \tau u \text{ est } u_{n+1}}} \end{array}$$

- Δ est l'application appelée dérivation discrète : pour toute suite $u \in E$, Δu est la suite appelée la dérivée discrète de u ,
- τ est l'application appelée décalage à gauche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $(\Delta u)_n$ (resp. $(\tau u)_n$) le terme d'indice n de la suite Δu (resp. τu).

Par exemple, si u est la suite géométrique de raison λ et de premier terme 1, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda^n$, alors $(\Delta u)_{23}$ est le nombre réel $\lambda^{24} - \lambda^{23}$ et $(\tau u)_{23}$ est le nombre réel λ^{24} .

On définit par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les applications Δ^p en posant

$$\Delta^0 = \text{id}_E, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \Delta^{p+1} = \Delta \circ \Delta^p.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $(\Delta^p u)_n$ le terme d'indice n de la suite $\Delta^p u$.

I Dérivation

/25

I.1. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\tau \tilde{3})_n$.

(b) L'application τ est-elle injective, surjective, bijective ?

I.2. (a) Montrer que $\Delta^{-1}(\{\tilde{0}\})$ est l'ensemble $\{\tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$ des suites constantes.

(b) L'application Δ est-elle injective, bijective ?

(c) Soient $(u, v) \in E^2$ fixées telles que $\Delta u = v$.

Exprimer, avec une somme télescopique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de u_0 et de termes de la suite v .

Δ est-elle surjective ?

I.3. Soient $(u, v) \in E^2$. Considérons l'assertion P : « si $u \times v = \tilde{0}$, alors $u = \tilde{0}$ ou $v = \tilde{0}$ ».

Écrire rigoureusement l'assertion $\text{non}(P)$.

Des deux assertions P et $\text{non}(P)$, laquelle est vraie ?

I.4. Montrer que $u \in E$ est une suite croissante si et seulement si $\Delta u \geq \tilde{0}$.

I.5. (a) Soient $(u, v) \in E^2$ telles que

$$u_0 \leq v_0 \quad \text{et} \quad \Delta u \leq \Delta v$$

Montrer que $u \leq v$.

(b) Soit a la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Calculer $\Delta(a)$.

Déduire de la question précédente que toute suite $u \in E$ vérifiant

$$u_0 \leq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (\Delta u)_n \leq n$$

satisfait l'inégalité $u \leq a$.

I.6. Soit $u \in E$.

(a) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^2 u)_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} u_{n+k}$$

I.7. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, π^k , la suite $(\pi^k)_{n \in \mathbb{N}}$ (ce qui signifie $\forall n \in \mathbb{N}, (\pi^k)_n = n^k$).

(a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta \pi^0)_n$, $(\Delta \pi^1)_n$, $(\Delta \pi^2)_n$ et $(\Delta \pi^3)_n$ en fonction de n .

Exprimer $\Delta \pi^0$ et $\Delta \pi^1$ avec les notations de l'énoncé puis en déduire qu'il existe

— $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\Delta \pi^2 = a\pi^0 + b\pi^1$,

— $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\Delta \pi^3 = \alpha\pi^0 + \beta\pi^1 + \gamma\pi^2$.

(b) Généralisons ce qui précède. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta \pi^k)_n$ sous forme de somme de puissances de n . En déduire une expression de $\Delta \pi^k$ comme une somme de coefficients réels fois certaines suites π^i pour $i \in \mathbb{N}$ (on dit que $\Delta \pi^k$ s'écrit comme une combinaison linéaire des suites de la famille $(\pi^i)_{i \in \mathbb{N}}$).

I.8. Démontrer la formule :

$$\forall (u, v) \in E^2, \Delta(u \times v) = (\Delta u) \times (\tau v) + u \times (\Delta v)$$

De quelle formule d'analyse la relation ci-dessus est un analogue discret ?

II Puissance descendante /14

Soit $m \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on appelle m^e puissance descendante de n , le réel noté $n^{\underline{m}}$ et défini par :

$$n^{\underline{m}} = \begin{cases} \prod_{k=n-m+1}^n k = n(n-1) \dots (n-m+1) & \text{si } m \in \mathbb{N}, \\ \prod_{k=n+1}^{n-m} \frac{1}{k} = \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n-m)} & \text{si } m < 0, \end{cases}$$

où l'on utilise la convention usuelle suivante : lorsque l'ensemble parcouru par l'indice d'un produit est vide, ce produit vaut 1.

Dans la suite du problème, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on notera $\pi^{\underline{m}}$ la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $(\pi^{\underline{m}})_n = n^{\underline{m}}$.

II.1. (a) Préciser explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers $n^{\underline{0}}$, $n^{\underline{1}}$, $n^{\underline{2}}$, $n^{\underline{-1}}$ et $n^{\underline{-2}}$.

(b) Écrire, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n^{\underline{m}}$ avec des factorielles. On distinguera les situations : $m > 0$ (et, au sein de ce cas, $n < m$ et $n \geq m$), $m = 0$ et $m < 0$.

II.2. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, exprimer $\Delta(\lambda u)$ en fonction de λ et Δu .

(b) Montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta \pi^{\underline{m}} = m \times \pi^{\underline{m-1}}$$

- (c) Expliciter $\Delta\pi^{-1}$, $\Delta^2\pi^{-1}$ et $\Delta^3\pi^{-1}$ en fonction d'une suite de la famille $(\pi^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. En déduire une conjecture permettant d'exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Delta^p\pi^{-1}$ en fonction de p et d'une suite de la famille $(\pi^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, puis démontrer cette conjecture par récurrence.

II.3. Soit $p \in \mathbb{N}$. En calculant le terme d'indice $n - 1$ de $\Delta^p\pi^{-1}$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k} = \frac{1}{n \binom{n+p}{p}}.$$

On pourra utiliser une formule permettant d'exprimer $\Delta^p u$ en fonction des termes de la suite u établie dans la partie I.

III Primitives /27

On appelle primitive de $u \in E$, toute suite U de E telle que $\Delta U = u$.

III.1. Soit $u \in E$. Justifier, à l'aide d'un résultat établi dans les premières questions de la partie I, que u admet au moins une primitive.

III.2. Soient U et V deux primitives de $u \in E$.

- (a) Calculer $\Delta(V - U)$.
 (b) En déduire que l'ensemble des primitives de u est $\{U + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$.

III.3. Calcul d'une primitive de π^{-1} et une application.

- (a) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (pour $n = 0$, l'ensemble des indices est vide donc, par convention, $H_0 = 0$). Ce nombre s'appelle le n^{e} nombre harmonique.
 Montrer que H est **une** primitive de $\pi^{-1} = (n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$.

- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = -1$.

- (c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\Delta S)_n = \frac{1}{n+1}.$$

- (d) En déduire, à l'aide de la question III.2, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \binom{n}{1} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \binom{n}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

III.4. Calculs des primitives des autres puissances descendantes π^m pour $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Sachant que $U \in E$ est une primitive de $u \in E$, comment construire **une** primitive de λu à partir de U ? On pourra s'inspirer le résultat de la question II.2(a).

En déduire **les** primitives de $\pi^m = (n^m)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $m \neq -1$.

- (b) Soient $(U, V) \in E^2$ des primitives respectives de $(u, v) \in E^2$. Comment construire une primitive de $u + v$ à partir de U et V ?

En déduire **les** primitives de $\pi^1 + \pi^2$ et de $\pi^1 + 3\pi^2 + \pi^3$.

III.5. (a) Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$, montrer que

$$u_{p+1} = u_n + \sum_{k=n}^p (\Delta u)_k. \quad (1)$$

- (b) Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tels que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^2 = ak^1 + bk^2 \quad \text{et} \quad k^3 = ck^1 + dk^2 + ek^3$$

- (c) En déduire deux primitives de π^2 et π^3 respectivement puis en utilisant judicieusement la formule (2), établir, pour tous entiers naturels $0 \leq n \leq p$, des expressions de $\sum_{k=n}^p k^2$ et $\sum_{k=n}^p k^3$ explicitement en fonction de n et p .

PROBLÈME : CALCUL DIFFÉRENTIEL DISCRET

I Dérivation

I.1. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\tau\tilde{3})_n$.

Pour tout entier n , $(\tilde{3})_n = 3$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\tau\tilde{3})_n = (\tilde{3})_{n+1} = 3 \quad \text{soit aussi} \quad \tau\tilde{3} = \tilde{3}.$$

/1

(b) L'application τ est-elle injective, surjective, bijective ?

• **Injectivité :**

Analyse/tentative de preuve au brouillon pour voir : soient u et v telles que $\tau(u) = \tau(v)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = (\tau u)_n = (\tau v)_n = v_{n+1}$.

On n'a donc pas nécessairement $u_0 = v_0$ donc on se dit que τ ne doit pas être injective.

Rédaction définitive. Posons les suites $u = \tilde{0}$ et v telle que $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$.

Alors $u \neq v$ car $u_0 \neq v_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(\tau u)_n = u_{n+1} = 0 = v_{n+1} = (\tau v)_n$ donc $\tau u = \tau v$.

/1

Ainsi, τ n'est pas injective, donc τ n'est pas bijective.

• **Surjectivité :**

Soit une suite $y \in E$ fixée quelconque.

Posons la suite x définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_{n+1} = y_n$ et $x_0 = 0$.

Alors x est parfaitement définie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\tau x)_n = x_{n+1} = y_n$.

Donc $\tau x = y$.

/1

Ainsi, τ est surjective.

I.2. (a) Montrer que $\Delta^{-1}(\{\tilde{0}\})$ est l'ensemble $\{\tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$ des suites constantes.

Notons C , l'ensemble des suites constantes.

Rappelons que, par définition, $v \in \Delta^{-1}(\{\tilde{0}\}) \iff \Delta v = \tilde{0} \iff \forall n \in \mathbb{N}, (\Delta v)_n = (\tilde{0})_n = 0$.

Soit $u \in C$ fixée quelconque. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = \tilde{c}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n = c - c = 0$.

Donc $\Delta u = \tilde{0}$ d'où $u \in C$.

Ainsi, $C \subset \Delta^{-1}(\{\tilde{0}\})$.

/1

Réciproquement, soit $u \in \Delta^{-1}(\{\tilde{0}\})$ fixée quelconque.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 = (\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$.

Ainsi, pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n$. Donc la suite u est constante : $u \in C$.

Par conséquent, $\Delta^{-1}(\{\tilde{0}\}) \subset C$.

/1

Ainsi, $\Delta^{-1}(\{\tilde{0}\}) = C$, ensemble des suites constantes.

(b) L'application Δ est-elle injective, bijective ?

D'après la question précédente, $\Delta\tilde{0} = \tilde{0} = \Delta\tilde{1}$.

/1

Donc Δ n'est pas injective. Elle n'est, par conséquent, pas bijective.

(c) Soient $(u, v) \in E^2$ fixées telles que $\Delta u = v$.

Exprimer, avec une somme télescopique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de u_0 et de termes de la suite v .

Δ est-elle surjective ?

- Nécessairement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = v_n$, donc (cf TD Télescoping) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k .$$

/2

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ (et $u_0 = u_0$).

- **Δ est-elle surjective ?**

Soit une suite $v \in E$ fixée quelconque. Posons alors la suite u définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k .$$

Alors pour tout entier n ,

$$(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^n v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_n + \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_n .$$

Donc $\Delta u = v$. Ainsi v admet nécessairement un antécédent par Δ .

/1

Ainsi, Δ est surjective (de E sur E).

I.3. Soient $(u, v) \in E^2$. Considérons l'assertion P : « si $u \times v = \tilde{0}$, alors $u = \tilde{0}$ ou $v = \tilde{0}$ ».

Écrire rigoureusement l'assertion $\text{non}(P)$.

Des deux assertions P et $\text{non}(P)$, laquelle est vraie ?

$\star \quad \text{non}(P) \iff \exists (u, v) \in E^2 : u \times v = \tilde{0} \text{ et } u \neq \tilde{0} \text{ et } v \neq \tilde{0} .$

/1

$\star$ Définissons les suites u et v par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$, $v_n = 1$, $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u \times v)_n = u_n \times v_n = 0, \quad u \neq \tilde{0} \text{ (car } u_0 \neq 0) \text{ et } v \neq \tilde{0} \text{ (car } v_{2021} \neq 0) .$$

Ainsi, il existe $(u, v) \in E^2$ telles que $u \times v = \tilde{0}$ et $u \neq \tilde{0}$ et $v \neq \tilde{0}$ donc $\text{non}(P)$ est vraie.

/1

On dit que l'ensemble E n'est pas intègre.

I.4. Montrer que $u \in E$ est une suite croissante si et seulement si $\Delta u \geq \tilde{0}$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \text{ est croissante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (\Delta u)_n \geq 0 \\ &\iff \Delta u \geq \tilde{0} \end{aligned}$$

/1

Ainsi, $u \in E$ est une suite croissante si et seulement si $\Delta u \geq \tilde{0}$.

I.5. (a) Soient $(u, v) \in E^2$ telles que

$$u_0 \leq v_0 \quad \text{et} \quad \Delta u \leq \Delta v$$

Montrer que $u \leq v$.

On note $U = \Delta u$ et $V = \Delta v$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. D'après la question I.2(c), $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} U_k$ et $v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} V_k$.

Par addition des inégalités $\forall k = 0, \dots, n-1$, $U_k = (\Delta u)_k \leq (\Delta v)_k = V_k$

$$\sum_{k=0}^{n-1} U_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} V_k$$

or on a également $u_0 \leq v_0$ d'où, toujours par addition d'inégalités dans le même sens,

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} U_k \leq v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} V_k = v_n .$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, c'est-à-dire $u \leq v$.

/2

🔗 Remarques !

🔗 On pourrait aussi démontrer que $\Delta(v - u) = \Delta v - \Delta u \geq \tilde{0}$, donc $v - u$ est croissante.

🔗 Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(v - u)_n = v_n - u_n \geq v_0 - u_0 \geq 0$.

- (b) Soit a la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Calculer $\Delta(a)$.

Déduire de la question précédente que toute suite $u \in E$ vérifiant

$$u_0 \leq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (\Delta u)_n \leq n$$

satisfait l'inégalité $u \leq a$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left((n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n \right) = \frac{1}{2} (n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n) = n$$

On applique directement la réponse à la question précédente avec $u \leftarrow u$ et $v \leftarrow a$ (ce qui est autorisé car $u_0 \leq 0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a_n$).

Ainsi, $u \leq a$.

/0,5

/1

I.6. Soit $u \in E$.

- (a) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\Delta^2 u)_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ (quelconque et fixé) :

$$(\Delta^2 u)_n = (\Delta(\Delta u))_n = (\Delta u)_{n+1} - (\Delta u)_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\Delta^2 u)_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$.

/1,5

- (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} u_{n+k}$$

Posons, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_p : \ll \forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} u_{n+k} \gg$.

— $\Delta^0 u = u$, donc $(\Delta^0 u)_n = (\text{Id}_E(u))_n = u_n$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} (-1)^{0-k} u_{n+k} = \underbrace{1(-1)^{-0} u_{n+0}}_{k=0} = u_n$.

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

/1

/0,5

- Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_p$ est vraie.
Par définition de Δ^{p+1} , on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(\Delta^{p+1}u)_n &= (\Delta(\Delta^p u))_n = (\Delta^p u)_{n+1} - (\Delta^p u)_n \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} u_{n+1+k}}_{\text{d'après } \mathcal{P}_p \text{ en } n+1} - \underbrace{\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} u_{n+k}}_{\text{d'après } \mathcal{P}_p \text{ en } n} \\
&= \sum_{h=1}^{p+1} \underbrace{\binom{p}{h-1} (-1)^{p-h+1} u_{n+h}}_{h=k+1} - \sum_{h=0}^p \underbrace{\binom{p}{h} (-1)^{p-h} u_{n+h}}_{h=k} \\
&= \left(\sum_{h=1}^p \binom{p}{h-1} (-1)^{p-h+1} u_{n+h} + \binom{p}{p} (-1)^0 u_{n+p+1} \right) \\
&\quad - \left(\binom{p}{0} (-1)^p u_n + \sum_{h=1}^p \binom{p}{h} (-1)^{p-h} u_{n+h} \right) \\
&= 1(-1)^{p+1} u_n + \sum_{h=1}^p \left(\binom{p}{h-1} + \binom{p}{h} \right) (-1)^{p+1-h} u_{n+h} + 1(-1)^0 u_{n+p+1} \\
&= \binom{p+1}{0} (-1)^{p+1-0} u_n + \sum_{h=1}^p \binom{p+1}{h} (-1)^{p+1-h} u_{n+h} + \binom{p+1}{p+1} (-1)^{(p+1)-(p+1)} u_{n+p+1}
\end{aligned}$$

On a appliqué la formule de Pascal : $\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}$, donc

$$(\Delta^{p+1}u)_n = \sum_{h=0}^{p+1} (-1)^{p+1-h} \binom{p+1}{h} (-1)^{p+1-h} u_{n+h} .$$

Ainsi $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

On a donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} u_{n+k} .}$$

I.7. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, π^k , la suite $(n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ (ce qui signifie $\forall n \in \mathbb{N}, (\pi^k)_n = n^k$).

(a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta\pi^0)_n$, $(\Delta\pi^1)_n$, $(\Delta\pi^2)_n$ et $(\Delta\pi^3)_n$ en fonction de n .

Exprimer $\Delta\pi^0$ et $\Delta\pi^1$ avec les notations de l'énoncé puis en déduire qu'il existe

- $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\Delta\pi^2 = a\pi^0 + b\pi^1$,
- $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\Delta\pi^3 = \alpha\pi^0 + \beta\pi^1 + \gamma\pi^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(\Delta\pi^0)_n &= (\pi^0)_{n+1} - (\pi^0)_n = (n+1)^0 - n^0 = 1 - 1 = 0 \\
(\Delta\pi^1)_n &= (\pi^1)_{n+1} - (\pi^1)_n = (n+1)^1 - n^1 = n+1 - n = 1 \\
(\Delta\pi^2)_n &= (\pi^2)_{n+1} - (\pi^2)_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \\
(\Delta\pi^3)_n &= (\pi^3)_{n+1} - (\pi^3)_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Delta\pi^0 = \tilde{0}, \Delta\pi^1 = \tilde{1} = \pi^0, \Delta\pi^2 = 2\pi^1 + \pi^0, \Delta\pi^3 = 3\pi^2 + 3\pi^1 + \pi^0 .}$$

(b) Généralisons ce qui précède. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta\pi^k)_n$ sous forme de somme de puissances de n . En déduire une expression de $\Delta\pi^k$ comme une somme de coefficients réels fois certaines suites π^i pour $i \in \mathbb{N}$ (on dit que $\Delta\pi^k$ s'écrit comme une combinaison linéaire des suites de la famille $(\pi^i)_{i \in \mathbb{N}}$).

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout entier n , on applique la formule du binôme de Newton :

$$(\Delta\pi^k)_n = (n+1)^k - n^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^i 1^{k-i} - n^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^i = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (\pi^i)_n$$

Le résultat étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Delta \pi^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \pi^i.$$

I.8. Démontrer la formule :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \Delta(u \times v) = (\Delta u) \times (\tau v) + u \times (\Delta v)$$

De quelle formule d'analyse la relation ci-dessus est un analogue discret ?

Soient $(u, v) \in E^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (\Delta(u \times v))_n &= (u \times v)_{n+1} - (u \times v)_n = u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n \\ &= u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_{n+1} + u_nv_{n+1} - u_nv_n \\ &= (u_{n+1} - u_n)v_{n+1} - u_n(v_{n+1} - v_n) \\ &= (\Delta u)_n(\tau v)_n - u_n(\Delta v)_n \\ &= ((\Delta u) \times (\tau v) - u \times (\Delta v))_n \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall (u, v) \in E^2, \quad \Delta(u \times v) = (\Delta u) \times (\tau v) + u \times (\Delta v).$$

Il s'agit de la formule discrète de dérivation d'un produit de suites, analogue à la formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

II Puissance descendante

Soit $m \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on appelle m^e puissance descendante de n , le réel noté $n^{\underline{m}}$ et défini par :

$$n^{\underline{m}} = \begin{cases} \prod_{k=n-m+1}^n k = n(n-1) \dots (n-m+1) & \text{si } m \in \mathbb{N}, \\ \prod_{k=n+1}^{n-m} \frac{1}{k} = \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n-m)} & \text{si } m < 0, \end{cases}$$

où l'on utilise la convention usuelle suivante : lorsque l'ensemble parcouru par l'indice d'un produit est vide, ce produit vaut 1.

Dans la suite du problème, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on notera $\pi^{\underline{m}}$ la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $(\pi^{\underline{m}})_n = n^{\underline{m}}$.

II.1. (a) Préciser explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers $n^{\underline{0}}$, $n^{\underline{1}}$, $n^{\underline{2}}$, $n^{\underline{-1}}$ et $n^{\underline{-2}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

★ Pour $m = 0$, on a un produit vide, donc $n^{\underline{0}} = 1$.

★ Pour $m = 1$, $1 \geq 0$, donc $n^{\underline{1}} = \prod_{k=n-1+1}^n k = n$.

★ Pour $m = 2$, $2 \geq 0$, donc $n^{\underline{2}} = \prod_{k=n-2+1}^n k = (n-1)n$.

★ Pour $m = -1$, $-1 \leq 0$, donc $n^{\underline{-1}} = \prod_{k=n+1}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$.

★ Pour $m = -2$, $-2 \leq 0$, donc $n^{\underline{-2}} = \prod_{k=n+1}^{n+2} \frac{1}{k} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

(b) Écrire, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n^{\underline{m}}$ avec des factorielles. On distinguera les situations : $m > 0$ (et, au sein de ce cas, $n < m$ et $n \geq m$), $m = 0$ et $m < 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé.

★ Supposons $m > 0$.

★★ Supposons de plus $m > n$,

$$n^{\overline{m}} = n(n-1) \dots (n-m+1) = n(n-1) \dots (n-(m-1)) = 0$$

car l'un des termes du produit est nul.

★★ Supposons de plus $m \leq n$,

$$n^{\overline{m}} = n(n-1) \dots (n-m+1) = n(n-1) \dots (n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

★ Supposons $m < 0$ (donc $n-m \geq n+1$),

$$n^{\overline{m}} = \frac{1}{(n+1) \dots (n-m)} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

★ Supposons $m = 0$, nous avons vu précédemment que $n^{\overline{0}} = 1 = \frac{n!}{(n-0)!}$.

On retrouve dans tous les cas, la même formule :

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n^{\overline{m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$ si $m \leq n$ et $n^{\overline{m}} = 0$ si $m > n$.

II.2. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, exprimer $\Delta(\lambda u)$ en fonction de λ et Δu .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\Delta(\lambda u))_n = (\lambda u)_{n+1} - (\lambda u)_n = \lambda \times u_{n+1} - \lambda \times u_n = \lambda(u_{n+1} - u_n) = \lambda(\Delta u)_n = (\lambda \times \Delta u)_n$$

Ainsi, $\Delta(\lambda \times u) = \lambda \times \Delta u$.

(b) Montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta \pi^{\overline{m}} = m \times \pi^{\overline{m-1}}.$$

❓ On rappelle que π est la suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, (\pi)_n = n$.

Donc $(\pi^{\overline{m}})_n = n^{\overline{m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $m \leq n$ et $(\pi^{\overline{m}})_n = 0$ si $m > n$.

Soit $m \in \mathbb{Z}$ fixé.

• Pour $n \geq m$:

$$\begin{aligned} (\Delta \pi^{\overline{m}})_n &= \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!} - \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{(n+1)! - (n+1-m)n!}{(n+1-m)!} \\ &= \frac{n![(n+1) - (n+1-m)]}{(n+1-m)!} = \underbrace{m \frac{n!}{(n-(m-1))!}}_{\text{car } m \leq n \text{ donc } m-1 \leq n} = mn^{\overline{m-1}} = m(\pi^{\overline{m-1}})_n \end{aligned}$$

• Pour $n = m-1$, alors $n < m$ mais $n+1 = m$:

$$\begin{aligned} (\Delta \pi^{\overline{m}})_n &= (n+1)^{\overline{m}} - n^{\overline{m}} = \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!} - 0 = (n+1)! = m! \\ &= m \times \frac{n!}{0!} = m \times \underbrace{\frac{n!}{(n-(m-1))!}}_{\text{car } n = m-1} = mn^{\overline{m-1}} = m(\pi^{\overline{m-1}})_n \end{aligned}$$

• Et dans le cas où $n < m-1$ (évidemment, il faut que $m > 0$),

$$\begin{aligned} (\Delta \pi^{\overline{m}})_n &= 0 - 0 = 0 = \underbrace{m \times 0 = m \times n^{\overline{m-1}}}_{n^{\overline{m-1}} = 0 \text{ car } n < m-1} = m(\pi^{\overline{m-1}})_n \end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas : $\forall m \in \mathbb{Z}, \Delta \pi^{\overline{m}} = m \times \pi^{\overline{m-1}}.$

/2

/0,5

/2,5

- (c) Expliciter $\Delta\pi^{-1}$, $\Delta^2\pi^{-1}$ et $\Delta^3\pi^{-1}$ en fonction d'une suite de la famille $(\pi^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. En déduire une conjecture permettant d'exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Delta^p\pi^{-1}$ en fonction de p et d'une suite de la famille $(\pi^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, puis démontrer cette conjecture par récurrence.

D'après la question précédente : $\Delta\pi^{-1} = -\pi^{-2}$.

$$\text{Puis } \Delta^2\pi^{-1} = \Delta(\Delta\pi^{-1}) = \Delta((-1) \times \pi^{-2}) \underset{\text{quest. II.2(a)}}{=} (-1) \times \Delta\pi^{-2} = (-1) \times (-2)\pi^{-3} = 2\pi^{-3}.$$

$$\text{Et enfin } \Delta^3\pi^{-1} = \Delta(\Delta^2\pi^{-1}) = \Delta(2 \times \pi^{-3}) \underset{\text{quest. II.2(a)}}{=} 2 \times \Delta\pi^{-3} = 2 \times (-3)\pi^{-4} = -6\pi^{-4}.$$

On conjecture alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^k\pi^{-1} = (-1)^k k! \pi^{-1-k}$. /1

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_k$: « $\Delta^k\pi^{-1} = (-1)^k k! \pi^{-1-k}$ ».

— Par définition, $\Delta^0 = \text{Id}_E$ donc $\Delta^0\pi^{-1} = \pi^{-1} = (-1)^0 0! \pi^{-1-0}$, donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}_k$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1}\pi^{-1} &= \Delta(\Delta^k\pi^{-1}) \underset{\mathcal{Q}_k \text{ est vraie}}{=} \Delta((-1)^k k! \pi^{-1-k}) \underset{\text{quest. II.2(a)}}{=} (-1)^k k! \Delta(\pi^{-1-k}) \\ &\underset{\text{quest. II.2(b)}}{=} (-1)^k k! (-k-1) \pi^{-1-k-1} = (-1)^{k+1} (k+1)! \pi^{-1-(k+1)} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{Q}_{k+1}$ est vérifiée. /3

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \Delta^k\pi^{-1} = (-1)^k k! \pi^{-1-k}}$$

II.3. Soit $p \in \mathbb{N}$. En calculant le terme d'indice $n-1$ de $\Delta^p\pi^{-1}$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k} = \frac{1}{n \binom{n+p}{p}}$$

On pourra utiliser une formule permettant d'exprimer $\Delta^p u$ en fonction des termes de la suite u établie dans la partie I.

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule le terme d'indice $n-1$ de $\Delta^p\pi^{-1}$ de deux façons distinctes.

D'une part avec la formule précédente ($-1-p < 0$) : /2

$$\left(\Delta^p\pi^{-1}\right)_{n-1} = (-1)^p p! \left(\pi^{-1-p}\right)_{n-1} \underset{\substack{\text{expression de } (n-1)_{-1-p} \\ \text{quest. II.1(b), cas } m < 0}}{=} \frac{(-1)^p p! (n-1)!}{(n-1-(-1-p))!} = \frac{(-1)^p}{n \frac{(n+p)!}{n!p!}} = \frac{(-1)^p}{n \binom{n+p}{p}}.$$

D'autre part avec la formule établie dans la question I.6(b) : /1

$$\left(\Delta^p\pi^{-1}\right)_{n-1} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (\pi^{-1})_{n-1+k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \frac{1}{(n-1+k)+1}$$

Et donc en multipliant tout par $(-1)^p$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k} = \frac{1}{n \binom{n+p}{p}}}.$$

III Primitives

On appelle primitive de $u \in E$, toute suite U de E telle que $\Delta U = u$.

III.1. Soit $u \in E$. Justifier, à l'aide d'un résultat établi dans les premières questions de la partie I, que u admet au moins une primitive.

Dans la question I.2(c), nous avons prouvé que l'application Δ est surjective

donc pour toute suite $u \in E$ il existe au moins une suite $U \in E$ telle que $\Delta U = u$,

/1

ce qui signifie que toute suite $u \in E$ admet au moins une primitive.

III.2. Soient U et V deux primitives de $u \in E$.

(a) Calculer $\Delta(V - U)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} (\Delta(V - U))_n &= (V - U)_{n+1} - (V - U)_n \\ &= V_{n+1} - U_{n+1} - (V_n - U_n) \\ &= V_{n+1} - V_n - (U_{n+1} - U_n) \\ &= (\Delta V)_n - (\Delta U)_n \\ &= u_n - u_n \quad \text{car par hyp. } \Delta U = u = \Delta V \text{ par def. d'une primitive de } u \\ &= 0 \end{aligned}$$

/1

Ainsi, $\Delta(V - U) = \tilde{0}$.

(b) En déduire que l'ensemble des primitives de u est $\{U + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des primitives de u .

★ Soit $V \in \mathcal{E}$ fixée quelconque (ce qui a un sens car $\mathcal{E} \neq \emptyset$ d'après la question III.1).

D'après la question III.2(a), puisque U et V sont deux primitives de u , $\Delta(V - U) = \tilde{0}$

donc $V - U \in \Delta^{-1}(\{\tilde{0}\})$

or nous avons établi dans la question I.2(a) que $\Delta^{-1}(\{\tilde{0}\})$ est l'ensemble des suites constantes

donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $V - U = \tilde{c}$ d'où $V = U + \tilde{c}$ donc $V \in \{U + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Par conséquent, $\mathcal{E} \subset \{U + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$.

/1

★ Soit $W \in \{U + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$ fixé quelconque. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $W = U + \tilde{c}$.

Calculons, comme dans la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta W)_n = (\Delta(U + \tilde{c}))_n = U_{n+1} + c - (U_n + c) = \underbrace{(\Delta U)_n}_{= u_n} = u_n$$

car U est une primitive de u

donc $\Delta W = u$ d'où $W \in \mathcal{E}$.

Par conséquent, $\{U + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{E}$.

/1

Ainsi, $\mathcal{E} = \{U + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$.

III.3. Calcul d'une primitive de π^{-1} et une application.

(a) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (pour $n = 0$, l'ensemble des indices est vide donc, par convention,

$H_0 = 0$). Ce nombre s'appelle le n^{e} nombre harmonique.

Montrer que H est **une** primitive de $\pi^{-1} = (n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque

$$\star \text{ si } n = 0, (\Delta H)_0 = H_1 - \underbrace{H_0}_{=0} = 1 = \frac{1}{1+0},$$

$$\star \text{ sinon, } n \geq 1 \text{ d'où } (\Delta H)_n = H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta H)_n = \frac{1}{n+1}$ donc $\Delta H = \pi^{-1}$ ce qui signifie que :

/1

H est **une** primitive de π^{-1} .

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = -1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Cherchons à utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} &= \underbrace{\binom{n+1}{0} (-1)^0 \times 1^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \times 1^{n+1-k}}_{= (-1+1)^{n+1}} - \binom{n+1}{0} (-1)^0 \times 1^{n+1-0} \\ &= 0^{n+1} - 1 \\ &= -1 \quad \text{car } n \in \mathbb{N} \text{ donc } n+1 \in \mathbb{N}^* \text{ donc } 0^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

/2

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = -1$.

(c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\Delta S)_n = \frac{1}{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$\star \text{ si } n = 0, (\Delta S)_0 = S_1 - \underbrace{S_0}_{=0} = \frac{(-1)^{1-1}}{1} \binom{1}{1} = 1 = \frac{1}{1+0},$$

★ sinon, $n \geq 1$ d'où

$$\begin{aligned}
(\Delta S)_n &= S_{n+1} - S_n \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \\
&= \frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1} \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \\
&= \frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1} \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1} \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k-1} \quad \text{avec la relation de Pascal (possible car } k \geq 1) \\
&= \frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1} \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k-1} \\
&\quad \text{or } \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \\
&= -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \binom{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} \\
&= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \\
&= -\frac{1}{n+1} \times (-1) \quad \text{en utilisant le résultat du calcul de la question précédente} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\Delta S)_n = n^{-1}$ donc $\Delta S = \pi^{-1}$ ce qui signifie que

/3

S est **une** primitive de π^{-1} .

(d) En déduire, à l'aide de la question III.2, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \binom{n}{1} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \binom{n}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Dans les questions III.3(a) et III.3(c), nous avons établi respectivement que les suites H et S sont des primitives de π^{-1} , or d'après la question III.2, deux primitives d'une même suite diffèrent d'une constante si bien qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $S = H + \tilde{c}$. En considérant les termes d'indices 0 de cette égalité :

$$S_0 = H_0 + \tilde{c}_0 \iff 0 = 0 + c \iff c = 0 \quad \text{donc } S = H$$

/2

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = H_n \iff \binom{n}{1} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \binom{n}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$

III.4. Calculs des primitives des autres puissances descendantes π^m pour $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Sachant que $U \in E$ est une primitive de $u \in E$, comment construire **une** primitive de λu à partir de U ? On pourra s'inspirer du résultat de la question II.2(a).

En déduire **les** primitives de $\pi^m = (n^m)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $m \neq -1$.

- Calculons $\Delta(\lambda U)$, en utilisant le résultat de la question II.2(a) pour $\lambda \leftarrow \lambda$ et $u \leftarrow U$,

$$\Delta(\lambda U) = \lambda(\Delta U) = \lambda u$$

/1

Ainsi, λU est une primitive de λu .

- Nous avons établi dans la question II.2(b) que

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \Delta \pi^a = a\pi^{a-1}$$

donc, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, π^a est une primitive de $a\pi^{a-1}$.

Soit $m \in \mathbb{Z}$ fixé quelconque tel que $m \neq -1$. Appliquons le résultat ci-dessus pour $a \leftarrow m+1$:

π^{m+1} est une primitive de $(m+1)\pi^m$.

Puisque $m \neq -1$, $m+1 \neq 0$ donc $\frac{1}{m+1}$ a un sens, on peut appliquer le résultat du premier point

pour $u \leftarrow (m+1)\pi^m$, $U \leftarrow \pi^{m+1}$ et $\lambda \leftarrow \frac{1}{m+1}$:

$\frac{1}{m+1}\pi^{m+1}$ est une primitive de $\frac{1}{m+1} \times (m+1)\pi^m = \pi^m$.

Enfin, compte tenu de la description de l'ensemble des primitives d'une suite donnée connaissant une primitive établie dans la question III.2(b),

$$\boxed{\text{l'ensemble des primitives de } \pi^m \text{ est } \left\{ \frac{1}{m+1}\pi^{m+1} + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.}$$

- (b) Soient $(U, V) \in E^2$ des primitives respectives de $(u, v) \in E^2$. Comment construire une primitive de $u+v$ à partir de U et V ?

En déduire les primitives de $\pi^1 + \pi^2$ et de $\pi^1 + 3\pi^2 + \pi^3$.

- Calculons $\Delta(U+V)$ (d'une manière analogue au calcul mené dans la question III.2(a),

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta(U+V))_n = (U+V)_{n+1} - (U+V)_n = U_{n+1} - U_n + V_{n+1} - V_n = (\Delta U + \Delta V)_n$$

donc $\Delta(U+V) = \Delta U + \Delta V$ si bien que

$$\boxed{U+V \text{ est une primitive de } u+v.}$$

- D'après la question III.4(a) précédente, $\frac{1}{2}\pi^1$ et $\frac{1}{3}\pi^3$ sont des primitives respectives de π^1 et π^2 si bien qu'en utilisant le premier point de la question, $\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{3}\pi^3$ est une primitive de $\pi^1 + \pi^2$.

Enfin, compte tenu de la description de l'ensemble des primitives d'une suite donnée connaissant une primitive établie dans la question III.2(b),

$$\boxed{\text{l'ensemble des primitives de } \pi^1 + \pi^2 \text{ est } \left\{ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{3}\pi^3 + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.}$$

On montre de même que

$$\boxed{\text{l'ensemble des primitives de } \pi^1 + 3\pi^2 + \pi^3 \text{ est } \left\{ \frac{1}{2}\pi^2 + \pi^3 + \frac{1}{4}\pi^4 + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.}$$

III.5. (a) Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$, montrer que

$$u_{p+1} = u_n + \sum_{k=n}^p (\Delta u)_k. \quad (2)$$

Cette relation peut se déduire du calcul réalisé dans la question I.2(c) qui établit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta u)_k$$

En appliquant cette relation pour $n \leftarrow p+1$ et $n \leftarrow n$,

$$u_{p+1} - u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{p+1-1} (\Delta u)_k - \left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta u)_k \right) = \sum_{k=0}^p (\Delta u)_k - \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta u)_k = \sum_{k=n}^p (\Delta u)_k$$

si bien que

$$\boxed{u_{p+1} = u_n + \sum_{k=n}^p (\Delta u)_k.}$$

/1

/1

/1

/1

/1,5

(b) Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tels que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, k^2 = ak^1 + bk^2 \text{ et } k^3 = ck^1 + dk^2 + ek^3$$

○ Remarques !

⚡ La rédaction qui suit a nécessité l'étude au brouillon des systèmes $k^2 = ak^1 + bk^2$ et $k^3 = ck^1 + dk^2 + ek^3$ d'inconnues respectives $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(c, d, e) \in \mathbb{R}^3$. Comme seule l'existence d'une solution est demandée ici, il nous suffit de poser des valeurs pour a, b, c, d et e puis de vérifier qu'elles conviennent.

★ Posons $a = 1$ et $b = 1$.

Calculons, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$ak^1 + bk^2 = k + k(k - 1) = k + k^2 - k = k^2$$

★ Posons $c = 1, d = 3$ et $e = 1$.

Calculons, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$ck^1 + dk^2 + ek^3 = k + 3k(k - 1) + k(k - 1)(k - 2) = k + 3k^2 - 3k + k^3 - 3k^2 + 2k = k^3$$

(c) En déduire deux primitives de π^2 et π^3 respectivement puis en utilisant judicieusement la formule (2), établir, pour tous entiers naturels $0 \leq n \leq p$, des expressions de $\sum_{k=n}^p k^2$ et $\sum_{k=n}^p k^3$ explicitement en fonction de n et p .

- Une interprétation des relations de la question III.5(b) entre termes d'indices $k \in \mathbb{N}$ de différentes suites donne les égalités ci-dessous entre suites

$$\pi^1 + \pi^2 = \pi^2 \quad \text{et} \quad \pi^1 + 3\pi^2 + 2\pi^3 = \pi^3$$

Par ailleurs, nous avons déterminé dans la question III.4(b) les primitives des deux suites $\pi^1 + \pi^2$ et de $\pi^1 + 3\pi^2 + \pi^3$ donc une primitive de π^2 est $\sigma^2 = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{3}\pi^3$ et une primitive de π^3 est $\sigma^3 = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi^3 + \frac{1}{4}\pi^4$.

- Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq n \leq p$.

Appliquons la relation établie dans la question III.5(a) pour $u \leftarrow \sigma^2$ et utilisons que $\Delta\sigma^2 = \pi^2$:

$$\sigma_{p+1}^2 = \sigma_n^2 + \sum_{k=n}^p \underbrace{\pi_k^2}_{=k^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \sum_{k=n}^p k^2 &= \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{3}\pi^3 \right)_{p+1} - \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{3}\pi^3 \right)_n \\ &= \frac{1}{2}(p+1)p + \frac{1}{3}(p+1)p(p-1) - \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) \\ &= \frac{1}{6}(p+1)p(3+2(p-1)) - \frac{1}{6}n(n-1)(3+2(n-2)) \\ &= \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1) - \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=n}^p k^2 = \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1) - \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$.

De même appliquons la relation établie dans la question III.5(a) pour $u \leftarrow \sigma^3$ et utilisons que $\Delta\sigma^3 = \pi^3$:

$$\sigma_{p+1}^3 = \sigma_n^3 + \sum_{k=n}^p \underbrace{\pi_k^3}_{=k^3}$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où } \sum_{k=n}^p k^3 &= \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \pi^3 + \frac{1}{4}\pi^4 \right)_{p+1} - \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \pi^3 + \frac{1}{4}\pi^4 \right)_n \\
&= \frac{1}{2}(p+1)p + (p+1)p(p-1) + \frac{1}{4}(p+1)p(p-1)(p-2) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3) \right) \\
&= \frac{1}{4}(p+1)p(2+4(p-1) + (p-1)(p-2)) - \frac{1}{4}n(n-1)(2+4(n-2) + (n-2)(n-3)) \\
&= \frac{1}{4}(p+1)p(2+4p-4+p^2-3p+2) - \frac{1}{4}n(n-1)(2+4n-8+n^2-5n+6) \\
&= \frac{1}{4}(p+1)^2p^2 - \frac{1}{4}n^2(n-1)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=n}^p k^3 = \frac{1}{4}(p+1)^2p^2 - \frac{1}{4}n^2(n-1)^2.$