Devoir surveillé n°9

Sujet donné le jeudi 14 avril 2022, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Exercice - Cours

.1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
En cas de réponse affirmative, vous démontrerez le résultat, et en cas de réponse négative, vous donnerez un contre-exemple.

(a) (u_n) converge vers $0 \Longrightarrow \sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge.

(b) $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge $\Longrightarrow (u_n)$ converge vers 0.

(c) $u_n \sim v_n \Longrightarrow \sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant n_0} v_n$ sont de même nature.

(d) $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n \geqslant n_0} |u_n|$ converge

.2. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Problème - Nombres de Stirling

Notations

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n, l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$.
Les éléments de S_n sont appelés les permutations.
On note, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $\epsilon(\sigma)$ sa signature.
• Chaque permutation se décompose en un unique produit de cycles à supports disjoints.
On note donc pour tout permutation $\sigma \in S_n$, $n_c(\sigma)$, le nombre de cycles de σ.
Notons que ce nombre tient compte des points fixes de σ.
• On note $S_n(k) = \{\sigma \in S_n \mid n_c(\sigma) = k\}$, l'ensemble des permutations de S_n se décomposant en k cycles.
Et $s(n,k) = \mathrm{Card} S_n(k)$, c'est le nombre de permutations de S_n se décomposant en k cycles.
On notera que $s(n,0) = 0$, pour tout $n \geqslant 1$. *Si « besoin », on prendre $s(0,0) = 1$.*
• On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
• On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(X)^k$ le polynôme $X(X+1)(X+2)\ldots(X+k-1)$, ainsi que $(X)^0 = 1$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X)^{k+1} = (X+k) \times (X)^k$ *(résultat admis).*
• On note, pour toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, et tout réel $x \geqslant 0$, $S_a(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \overline{\mathbb{R}}$.
On peut alors définir la fonction $S_a : x \mapsto S_a(x)$ sur $\mathrm{D}_a = \{x \geqslant 0 \mid S_a(x) \neq +\infty\}$.

Ce problème est divisé en trois parties. La **Partie I** permet de faire de la combinatoire sur le groupe symétrique afin de mieux appréhender les nombres $s(n,k)$. La **Partie II** introduit les séries de fonctions à coefficients positifs comme une généralisation des polynômes. On applique les résultats analytiques ainsi trouvé en **Partie III** pour étudier la série de Stirling et en dégager quelques résultats.

I - Combinatoire. Nombres de Stirling

I.1. On considère, uniquement pour cette question, $n = 4$.
Donner les ensembles de $S_4(k)$ pour $k \in \{1, 4\}$. *On notera en particulier que $s(4,2) = 11$.*

I.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n = \displaystyle\biguplus_{k=1}^{n} S_n(k)$.

I.3. Décrire $\{\sigma \in S_n \mid \epsilon(\sigma) = 1\}$ en terme d'ensembles $S_n(k)$.

I.4. Quelques formules.

(a) Combien existe-t-il de cycle dont le support connu de cardinal k est $\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$?

(b) Montrer que $s(n,n) = 1$, $s(n,1) = (n-1)!$ et $s(n,n-1) = \dbinom{n}{2}$

(c) Montrer que $s(n,n-2) = \dfrac{3n-1}{4}\dbinom{n}{3}$.

(d) Montrer que $s(n,n-3)$ s'exprime comme le produit de deux coefficients binomiaux.

(e) Montrer que $s(n,2) = (n-1)! \times H_{n-1}$.

I.5. Montrer avec précision la relation par récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in \mathbb{N}_{n+1}, \qquad s(n+1,k) = n \times s(n,k) + s(n,k-1) \qquad (\star)$$

I.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit P_n, le polynôme :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) X^k$$

(a) Expliquer pourquoi, il existe une unique famille $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tel que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X)^k$

Le polynôme $(X)^k$ est défini au début du problème.

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P_{n+1} = (X+n) \times P_n$

(c) En déduire l'expression de P_n en fonction des polynômes $(X)^k$ (i.e. la valeur des λ_k)

(d) Conclure que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha+k) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^k = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha^{n_c(\sigma)} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+n}s(n,k)\alpha^k = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\alpha^{n_c(\sigma)}$$

II - Série de fonctions, à coefficients positifs

On considère ici une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et positive.
On renvoie particulièrement aux notations S_a D_a de fin d'introduction du devoir.

II.1. Ensembles de définition

(a) Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, quelle est la limite de $n^r x^n$ (pour $n \to +\infty$) ?

(b) En déduire que $[0,1[\subset \mathrm{D}_a$

(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $n(n-1)\dots(n-m+1)a_n x^{n-m}$ (pour $n \geqslant m$) est convergente.

On définit donc, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\partial^m S_a(x) := \displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n x^{n-m}$.

II.2. Montrer que la fonction S_a est croissante sur D_a.
On admet que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\partial^m S_a$ est également une fonction croissante sur $[0,1[$.

II.3. Propriété analytique de la fonction S_a.
Soit $x_1 < x_2 \in [0,1[$.

(a) Montrer que $S_a(x_2) - S_a(x_1) = (x_2 - x_1)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(\sum_{h=0}^{k-1} x_1^h x_2^{k-h-1}\right)$

(b) En déduire $(x_2 - x_1)\partial S_a(x_1) \leqslant S_a(x_2) - S_a(x_1) \leqslant (x_2 - x_1)\partial S_a(x_2)$.

(c) En déduire que S_a est continue sur $[0,1[$.

(d) Montrer que S_a est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x \in [0,1[$,

$$S_a'(x) = \partial S_a(x)$$

On notera que ce résultat se démontre sans tenir compte du fait que (a_n) est bornée.
Seules les convergences des séries à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1}$ pour $x \in [0,1[$, sont importantes.

II.4. (a) Montrer que S_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$, et que

$$\forall\, h \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [0,1[, \qquad S_a^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h}$$

(b) Que vaut $\dfrac{S_a^{(h)}(0)}{h!}$?

(c) En déduire que si pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ (série convergente),
alors nécessairement $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

II.5. Produit de Cauchy.
On considère pour cette question uniquement, deux suites bornées $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$

$$\sum_{k=0}^{p} c_k x^k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{p} b_k x^k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{2p} c_k x^k$$

(b) En déduire que $\forall\, x \in [0,1[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = S_a(x) \times S_b(x)$.

On note alors S_{a*b}, l'application $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, définie sur $[0,1[$ (au moins), même si (c_n) n'est pas bornée.

III - Série génératrice de Stirling

On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite ${}_k a$, définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $({}_k a)_n = \dfrac{s(n,k)}{n!}$.

III.1. Montrer que ${}_k a$ est une suite bornée.

On note alors $L_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ({}_k a)_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s(n,k)}{n!} x^n$.

D'après la partie précédente, L_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

III.2. Calcul de L_1.

(a) Soit $x \in [0,1[$. Quel est le terme général de série qui définie le nombre $L_1(x)$?
On attend une réponse, où les termes $s(n,k)$ ont été remplacés par leur valeur.

(b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$

$$-\ln(1-x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{x^j}{j} + \int_0^x \frac{t^N}{1-t} \mathrm{d}t$$

(c) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $L_1(x) = -\ln(1-x)$.

III.3. En exploitant la relation $(\star)$, montrer la relation

$$\forall\, k \geqslant 1, \forall\, x \in [0,1[, \qquad (1-x)L'_{k+1}(x) = L_k(x)$$

III.4. En déduire, par récurrence, que

$$\forall\, x \in [0,1[, \qquad L_k(x) = \frac{\big(-\ln(1-x)\big)^k}{k!}$$

III.5. Soit $x \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$, quelconques et fixés.
Dans ces questions, on démontre un résultat énoncé plusieurs fois en cours, et généralisé ici.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} L_k(x) t^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x) t^k = (1-x)^{-t}$$

(b) On admet que si pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $b_{n,k} \geqslant 0$ et si $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n,k} \right)$ converge,

alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \right)$ converge également et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n,k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \right)$.

Nous démontrerons ce résultat plus tard dans l'année.

Montrer que, pour $t > 0$

$$(1-x)^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} x^n$$

III.6. Calcul explicite de $s(n,k)$.

(a) Soit $n,k \in \mathbb{N}$, quel est le cardinal de $C(n,k) = \{(n_1, \dots n_k) \in \mathbb{N}^* \mid n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n\}$

(b) En exploitant k produits de Cauchy, montrer que

$$s(n,k) = \frac{n!}{k!} \sum_{(n_1,\dots n_k) \in C(n,k)} \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k}$$

(c) Supposons, en outre que n est un nombre premier et $k \in [\![2, n-1]\!]$.
Montrer que $s(n,k) \equiv 0[n]$.

Correction

Exercice - Cours

.1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
En cas de réponse affirmative, vous démontrerez le résultat, et en cas de réponse négative, vous donnerez un contre-exemple.

(a) (u_n) converge vers 0 $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.

FAUX.
L'exemple classique est donné par la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$. /1,5
Elle diverge alors que son terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0.

(b) $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge $\Longrightarrow (u_n)$ converge vers 0.

VRAI.
Notons $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. La série converge, ce qui est équivalent à dire que la suite (S_n) converge.
Notons ℓ cette limite.
La suite extraite (S_{n-1}) converge également, vers la même limite ℓ. /1,5
Par linéarité du passage à la limite, $u_n = S_n - S_{n-1}$ converge vers $\ell - \ell = 0$.

(c) $u_n \sim v_n \Longrightarrow \sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ sont de même nature.

FAUX.
Il est nécessaire que l'une au moins des deux suites de termes généraux soit de signe constant (à partir d'un certain rang).
En DM, nous avons vu un contre exemple.
Considérons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}} + (-1)^{n+1} n^{\frac{3}{4}}} \sim \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} =: v_n$.
Avec le critère des séries spéciales alternées (de Leibniz), on montre que la série $\sum v_n$ converge.
En revanche, un développement limité donne : /2

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} \left(1 + (-1)^{n+1} n^{\frac{1}{4}}\right)^{-1} = v_n + \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)}_{:=w_n}$$

Or $w_n \sim \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ est à termes positifs, divergente d'après le critère de Riemann. Ainsi $\sum w_n$ diverge.
Par conséquent, par addition d'une série convergente et d'une série divergente : $\sum u_n$ diverge.

(d) $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant n_0} |u_n|$ converge

---

FAUX.
Le contre-exemple est la série harmonique alternée. /1
$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, mais $\sum \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

.2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$.

On va appliquer le critère des séries spéciales alternées (de Leibniz).
Notons $z_n=\dfrac{\ln n}{n}$. Alors
• Par croissance comparée $(z_n)\to 0$.
• Pour $n=1$, $z_n=0$ et pour tout $n\geqslant 2$, $z_n>0$ (division de deux nombres positifs).
• Il reste à étudier la croissance. Comme z_n est explicite en fonction de n, le plus simple est de considérer $f:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$.

f est dérivable sur $D=[1,+\infty[$ et $\forall\, x\in D$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,
donc $f'(x)\leqslant 0\iff 1-\ln x\leqslant 0\iff x\geqslant e$.

Ainsi, (z_n) est décroissante pour $n\geqslant 3$, assurément.

On peut donc appliquer le critère en question et affirmé que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}z_n$ converge.
Or la convergence d'une série est indépendante des premiers termes. /2

$$\boxed{\text{Donc }\sum_{n\geqslant 1}z_n\text{ converge.}}$$

Problème - Nombres de Stirling

Notations

• Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note S_n, l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$.
Les éléments de S_n sont appelés les permutations.
On note, pour toute permutation $\sigma\in S_n$, $\epsilon(\sigma)$ sa signature.
• Chaque permutation se décompose en un unique produit de cycles à supports disjoints.
On note donc pour tout permutation $\sigma\in S_n$, $n_c(\sigma)$, le nombre de cycles de σ.
Notons que ce nombre tient compte des points fixes de σ.
• On note $S_n(k)=\{\sigma\in S_n\mid n_c(\sigma)=k\}$, l'ensemble des permutations de S_n se décomposant en k cycles.
Et $s(n,k)=\text{Card}S_n(k)$, c'est le nombre de permutations de S_n se décomposant en k cycles.
On notera que $s(n,0)=0$, pour tout $n\geqslant 1$. *Si « besoin », on prendre $s(0,0)=1$.*
• On note, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
• On note, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $(X)^k$ le polynôme $X(X+1)(X+2)\dots(X+k-1)$, ainsi que $(X)^0=1$.
Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(X)^{k+1}=(X+k)\times(X)^k$ *(résultat admis).*
• On note, pour toute suite $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, et tout réel $x\geqslant 0$, $S_a(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\in\overline{\mathbb{R}}$.
On peut alors définir la fonction $S_a:x\mapsto S_a(x)$ sur $\mathrm{D}_a=\{x\geqslant 0\mid S_a(x)\neq+\infty\}$.

Ce problème est divisé en trois parties. La **Partie I** permet de faire de la combinatoire sur le groupe symétrique afin de mieux appréhender les nombres $s(n,k)$. La **Partie II** introduit les séries de fonctions à coefficients positifs comme une généralisation des polynômes. On applique les résultats analytiques ainsi trouvé en **Partie III** pour étudier la série de Stirling et en dégager quelques résultats.

I - Combinatoire. Nombres de Stirling

I.1. On considère, uniquement pour cette question, $n = 4$.
Donner les ensembles de $S_4(k)$ pour $k \in \{1, 4\}$. *On notera en particulier que* $s(4, 2) = 11$.

On décrit tout simplement les ensembles S_4 en produit de cycles.
Aucun n'est écrit deux fois, ce qui assure qu'on en a pas écrit trop.
La sommes des valeurs de $s(4, k)$ donne $24 = 4!$ ce qui assure qu'on en a oublié aucun. /2

$$\boxed{\begin{array}{ll} S_4(1) & = \{(1\,2\,3\,4), (1\,2\,4\,3), (1\,3\,2\,4), (1\,3\,4\,2), (1\,4\,2\,3), (1\,4\,3\,2)\} \\ S_4(2) & = \{(1\,2\,3)(4), (1\,2\,4)(3), (1\,3\,2)(4), (1\,3\,4)(2), (1\,4\,2)(3), (1\,4\,3)(2), (1)(2\,3\,4), (1)(2\,4\,3) \\ & \quad (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \\ S_4(3) & = \{(1\,2)(3)(4), (1\,3)(2)(4), (1\,4)(2)(3), (2\,3)(1)(4), (2\,4)(1)(3), (3\,4)(1)(2)\} \\ S_4(4) & = \{(1)(2)(3)(4)\} \end{array}}$$

I.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n = \biguplus_{k=1}^{n} S_n(k)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $S_n(k)$ est un ensemble de permutations de $\mathbb{N}_n$, donc $S_n(k) \subset S_n$.
  Et donc $\bigcup_{k=1}^{n} S_n(k) \subset S_n$.
- Si $\sigma \in S_n$, notons $k = n_c(\sigma)$. Alors $\sigma \in S_n(k)$ et $k \in \mathbb{N}_n$, donc $\sigma \in \bigcup_{k=1}^{n} S_n(k)$.
- Enfin, si $\sigma \in S_n(k) \cap S_n(h)$, alors $n_c(\sigma) = k = h$. Donc $k = h$.
  Par contraposée : si $k \neq h$, $S_n(k) \cap S_n(h) = \emptyset$.

Par double inclusion, et comme la somme est disjointe, on peut écrire : /1

$$\boxed{S_n = \biguplus_{k=1}^{n} S_n(k).}$$

I.3. Décrire $\{\sigma \in S_n \mid \epsilon(\sigma) = 1\}$ en terme d'ensembles $S_n(k)$.

Soit $\sigma \in S_n$, une des formules qui donne la signature de σ est $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-n_c(\sigma)}$,
où $n_c(\sigma)$ est le nombre de cycles de σ (tenant compte des points fixes).
Ainsi, le groupe alterné s'écrit : /1,5

$$\boxed{A_n := \{\sigma \in S_n \mid \epsilon(\sigma) = 1\} = \bigcup_{k \equiv n[2]} S_n(k).}$$

I.4. Quelques formules.

(a) Combien existe-t-il de cycle dont le support connu de cardinal k est $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$?

Il y a $k!$ permutations de l'ensemble $E_k = \{a_1, a_2, \dots a_k\}$, i.e. $k!$ k-listes sans répétition de E_k,
mais un certain nombre conduise à un même application $\sigma \in S_n$.
On peut alors considérer la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur ces k-listes :
$L_1 \mathcal{R} L_2$ ssi ces deux listes conduisent à la même permutation.
Chacune des classes d'équivalence à le même nombre d'éléments : k.
En effet, $L_1 \mathcal{R} L_2$ ssi $\exists\, r \in [\![0, k-1]\!]$ tel que $\forall\, i \in \mathbb{N}_k$, $L_1[i + r\%k] = L_2[i]$.
Il y a, en effet, $k = \text{card}([\![0, k-1]\!]) = k$ éléments dans la classe de L_1.
Il y a alors $\dfrac{k!}{k} = (k-1)!$ classes différentes. C'est le nombre recherché. /1,5

$$\boxed{\text{Il existe } (k-1)!\ k\text{-cycles dont le support est } \{a_1, a_2, \dots a_k\}.}$$

(b) Montrer que $s(n,n) = 1$, $s(n,1) = (n-1)!$ et $s(n, n-1) = \binom{n}{2}$

$S_n(n) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_n}\}$, donc $s(n,n) = 1$.
$S_n(1)$ est l'ensemble des permutations avec un seul cycle donc $S_n(1)$ est l'ensemble des n-cycles dont le support est $\mathbb{N}_n$.
D'après la question précédente, $s(n,1) = (n-1)!$.
Enfin, $S_n(n-1)$ est l'ensemble des permutations avec $n-1$ cycles.
$\sigma \in S_n(n-1) \iff \sigma$ est une transposition de N_n. Il y en a donc $\binom{n}{2}$, i.e. autant que de paires de $\mathbb{N}_n$. /1

$$\boxed{s(n,n) = 1, \quad s(n,1) = (n-1)! \quad s(n,n-1) = \binom{n}{2}.}$$

(c) Montrer que $s(n, n-2) = \dfrac{3n-1}{4}\dbinom{n}{3}$.

Soit $\sigma \in S_n(n-2)$.
σ se décrit en $n-2$ cycles, notons k le nombres points fixes de σ.
Nécessairement $k < n-2$, sinon, il y aurait strictement plus de $n-2$ cycles. il y a donc deux options :
— ou bien σ possède $k = n-3$ points fixes et un cycle de longueur 3.
— ou bien σ possède $k = n-4$ points fixes et deux cycles de longueur 2.
En effet, si $k = n-5$, il reste 5 éléments à placer dans 3 cycles (car $n-5+3 = n-2$), chaque cycle non réduit à un singleton, ce qui demande 3×2 éléments différents au moins. Cela est impossible.
De même pour $k < n-5$.
Ensuite,
• Le nombre de 3-cycle distincts est donné par le choix du support $\binom{n}{3}$ possibilités et le nombre de permutation distincts associés : $(3-1)!$ d'après une question précédente.
• Le nombre de permutation de 2-cycle distincts est donné par le choix du premier support $\binom{n}{2}$ possibilités puis le choix du second support : $\binom{n-2}{2}$. Mais attention, on compte ici deux fois trop de permutations (car on peut faire permuter ces deux supports, donnant ainsi la même permutation).
On a donc : /2

$$s(n,n-2) = \binom{n}{3} \times 2! + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} = \frac{2 \times n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{2 \times 2! \times 2! \times (n-4)!}$$

$$\boxed{s(n,n-2) = \frac{n!}{3!(n-3)!} \times \left(2 + \frac{3(n-3)}{4}\right) = \frac{3n-1}{4}\binom{n}{3}}$$

(d) Montrer que $s(n, n-3)$ s'exprime comme le produit de deux coefficients binomiaux.

Soit $\sigma \in S_n(n-3)$ On raisonne de façon comparable : il y a donc trois options :
— ou bien σ possède $k = n-4$ points fixes et un cycle de longueur 4.
— ou bien σ possède $k = n-5$ points fixes, un cycles de longueur 2 et un cycle de longueur 3.
— ou bien σ possède $k = n-6$ points fixes, trois cycles de longueur 2 (qui peuvent permuter).
Dans le premier cas, il y a $\binom{n}{4} \times (4-1)!$ possibilités.
Dans le second cas, il y a $\binom{n}{2}\binom{n-2}{3} \times (3-1)!$
Dans le dernier cas, il y a $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2} \times \dfrac{1}{3!}$
On a donc /2,5

$$s(n,n-3) = 3!\frac{n!}{4!(n-4)!} + \frac{n!}{2!3!(n-5)!}2! + \frac{n!}{2!2!2!(n-6)!3!} = \frac{n!}{4!(n-4)!}\left(6+4(n-4)+\frac{1}{2}(n-4)(n-5)\right)$$

$$\boxed{s(n,n-3) = \binom{n}{4} \times \frac{12+8n-32+n^2-9n+20}{2} = \binom{n}{4} \times \frac{n^2-n}{2} = \binom{n}{4}\binom{n}{2}}$$

(e) Montrer que $s(n,2) = (n-1)! \times H_{n-1}$.

$S_n(2)$ est l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$ qui se décrivent en produit de deux cycles.
Soit $\sigma \in S_n(2)$. Considérons $n \in \mathbb{N}_n$, alors n est dans l'un des deux cycles.
Notons k, le cardinal de l'orbite de n (i.e. du cycle de σ dans lequel se trouve n).
Alors k varie entre 1 (n est point fixe) et $n-1$ (σ possède un $n-1$-cycle dans lequel se trouve n).
Fixons k. $\mathbb{N}_n$ est donc séparé en deux ensembles disjoints I_k et $J_k = \mathbb{N}_n \setminus I_k$
avec $\text{card}(I_k) = k$, i.e. $I_k \in \binom{\mathbb{N}_n}{k}$ et $n \in I_k$ ou encore $I_k \setminus \{n\} \in \binom{\mathbb{N}_{n-1}}{k-1}$.
Il y a alors, d'après la question 3.(a), $(k-1)!$ cycles disjoints de support I_k
et $(n-k-1)!$ cycles disjoints de support J_k.
Finalement, on a

$$S_n(2) = \biguplus_{k=1}^{n-1} \{c_1 \circ c_2 \mid \text{card}(\text{supp}(\{c_1\})) = k, n \in \text{supp}(c_1)\}$$

$$\begin{aligned} s(n,2) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{I_k}(k-1)!(n-k-1)!\right] = \sum_{k=1}^{n-1}\left[(k-1)!(n-k-1)!\sum_{I_k}1\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)!(n-k-1)!\binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!(n-k-1)!(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k} \end{aligned}$$

En posant $j = n-k$, on trouve : /2

$$\boxed{s(n,2) = (n-1)!\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} = (n-1)! \times H_{n-1}.}$$

I.5. Montrer avec précision la relation par récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in \mathbb{N}_{n+1}, \qquad s(n+1,k) = n \times s(n,k) + s(n,k-1) \qquad (\star)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}_{n+1}$.
Soit $\sigma \in S_{n+1}(k)$.
Notons c, le cycle qui compose σ, dans la décomposition en produit de cycle, et qui contient $n+1$.
Plus précisément, il existe $p \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $c = \big(n+1\ \underbrace{\sigma(n+1)\ \ldots\ \sigma^p(n+1)}_{\in \mathbb{N}_n}\big)$ orbite de $n+1$ pour σ,
p est donc l'ordre de $n+1$ dans la permutation σ.
Notons $c_2, c_3 \ldots c_k$ les autres cycles qui décomposent σ, i.e. : $\sigma = c \circ c_2 \ldots c_k$.
Notons encore c', le cycle $\big(\sigma(n+1)\ \ldots\ \sigma^p(n+1)\big)$. On peut avoir $c' = \emptyset$ ssi $\sigma(n+1) = n+1$.
Alors $\sigma' = c' \circ c_2 \ldots c_k$ est une permutation de $\mathbb{N}_n$, possédant k cycle si $c' \neq \emptyset$ ou $k-1$ cycles si $c' = \emptyset$.

L'application

$$\Phi : \sigma \in S_{n+1}(k) \mapsto \begin{cases} \big(\sigma(n+1), \sigma'\big) & \in \mathbb{N}_n \times S_n(k) \quad \text{si } \sigma(n+1) \neq n+1 \\ \sigma' & \in S_n(k-1) \quad \text{si } \sigma(n+1) = n+1 \end{cases}$$

est donc bien définie de $S_{n+1}(k)$ sur $\mathbb{N}_n \times S_n(k) \biguplus S_n(k-1)$.
Montrons qu'elle est bijective en définissant la réciproque.
— Si $\sigma' \in S_n(k-1)$, alors $\Phi^{-1}(\sigma') = \sigma' \circ (n+1)$ (composition avec le 1-cycle $(n+1)$).

— Si $\sigma' \in S_n(k)$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}_n$, $\Phi^{-1}(m,\sigma') = (m\,\sigma'(m)\ \dots \sigma'^r(m)\, n+1)c_2 \dots c_k$ si r est l'ordre de m pour σ'.

On a donc Φ bijective et ainsi : /2,5

$$\boxed{s(n+1,k) = \mathrm{card}(S_{n+1}(k)) = \mathrm{card}(\mathbb{N}_n \times S_n(k)) + \mathrm{card}(S_n(k-1)) = n \times s(n,k) + s(n,k-1)}$$

I.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit P_n, le polynôme :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) X^k$$

(a) Expliquer pourquoi, il existe une unique famille $(\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tel que $P_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X)^k$

Le polynôme $(X)^k$ est défini au début du problème.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X)^k$ est un polynôme de degré k.

Donc la famille $\left((X)^0, (X)^1, \dots (X)^n\right)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. Elle est donc libre.

C'est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$, qui possède $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut l'écrire (de manière unique) sur cette base : /1

$$\boxed{\text{il existe une unique famille } (\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ tel que } P_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X)^k.}$$

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P_{n+1} = (X+n) \times P_n$

Soit $n \geqslant 1$, on applique la relation $(\star)$:

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k) X^k = \sum_{k=0}^{n+1} n s(n,k) X^k + s(n,k-1) X^k = n \sum_{k=0}^{n} s(n,k) X^k + \sum_{k=1}^{n+1} s(n,k-1) X^k$$

où l'on notera que les indices ont évolués car $s(n,n+1) = 0$ (1ere somme) et $s(n,-1) = 0$ (2nde somme).

Puis en posant $j = k-1$ et en factorisant par P_n : /1,5

$$\boxed{P_{n+1} = nP_n + X \sum_{j=0}^{n} s(n,j) X^j = (n+X) P_n}$$

(c) En déduire l'expression de P_n en fonction des polynômes $(X)^k$ (i.e. la valeur des λ_k)

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_n$: « $P_n = (X)^n$ »

— $P_1 = s(1,1)X = X = (X)^1$. Donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
  On a alors $P_{n+1} = (X+n)P_n = (X+n)(X)^n = (X)^{n+1}$.
  Donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie. /1

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1, \quad P_n = (X)^n}$$

(d) Conclure que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + k) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \alpha^k = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha^{n_c(\sigma)} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} s(n,k) \alpha^k = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \alpha^{n_c(\sigma)}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On reprend la relation polynomiale précédente

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)X^k = X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)$$

et on substitue α à la place de X.
Notons enfin que, pour tout $\sigma \in S_n$, $n_c(\sigma)(=k) \in \mathbb{N}_n$, on peut arranger la somme :

$$\sum_{\sigma\in S_n} \alpha^{n_c(\sigma)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\sigma\in S_n \text{ et } n_c(\sigma)=k} \alpha^k \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \left(\sum_{\sigma\in S_n \text{ et } n_c(\sigma)=k} 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k s(n,k)$$

$$\boxed{\sum_{\sigma\in S_n} \alpha^{n_c(\sigma)} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^k = \alpha\times(\alpha+1)\times\cdots\times(\alpha+n-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha+k)}$$

La seconde formule est plus compliquée à démontrer, on va commencer par composer la relation polynomiale avec $-X$ (à l'intérieur) :

$$P_n(-X) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)[-X]^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k s(n,k)X^k = \prod_{k=0}^{n-1}((-X)+k) = (-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$$

Et donc, en multipliant par $(-1)^n$ et en substituant α à la place de X :

$$\alpha(\alpha-1)\times\cdots\times(\alpha-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+n}s(n,k)\alpha^k$$

De la même façon que précédemment, en réorganisant selon $k := n_c(\sigma)$ et en tenant compte du fait que :
si $\sigma \in S_n(k)$, alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-k} = (-1)^{n+k}$ car la multiplication par $1 = (-1)^{2k}$ ne change pas ce nombre.

$$\sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\alpha^{n_c(\sigma)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\sigma\in S_n \text{ et } n_c(\sigma)=k} \epsilon(\sigma)\alpha^k \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \left(\sum_{\sigma\in S_n \text{ et } n_c(\sigma)=k} (-1)^{n-k} \right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\alpha^k s(n,k)$$

Bilan : /3,5

$$\boxed{\alpha(\alpha-1)\times\cdots\times(\alpha-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+n}s(n,k)\alpha^k = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\alpha^{n_c(\sigma)}}$$

II - Série de fonctions, à coefficients positifs

On considère ici une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et positive.

II.1. Ensembles de définition.

(a) Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, quelle est la limite de $n^r x^n$ (pour $n \to +\infty$) ?

C'est un théorème de croissance comparée, démontré dans le cours. /1

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,1[, \text{ pour tout } r \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} n^r x^n = 0.}$$

(b) En déduire que $[0,1[\subset \mathrm{D}_a$

Soit $x \in [0,1[$ On applique la méthode associée au critère de Riemann.
Comme a_n est bornée (et positive), il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant n^2 \times a_n x^n \leqslant M n^2 x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $a_n x^n = o(\frac{1}{n^2})$. Puis $\frac{1}{n^2} > 0$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
Donc, par comparaison de séries à termes positifs, /1,5

$$\boxed{\forall\ x \in [0,1[,\ \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \text{ converge et donc } [0,1[\subset \mathrm{D}_a.}$$

(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $n(n-1)\dots(n-m+1)a_n x^{n-m}$ (pour $n \geqslant m$) est convergente.

Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons $x > 0$ (sinon, c'est une somme nulle). Pour tout $n \geqslant m$:

$$0 \leqslant n^2 \times n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n x^{n-m} \leqslant \frac{M}{x} n^{m+2} x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après la première question de cette partie. Ainsi $n(n-1)\dots(n-m+1)a_n x^{n-m} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
Donc par comparaison de série à termes positifs, comme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (critère de Riemann), /1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,1[,\ \sum_{n\geqslant m} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n x^{n-m} x^{n-1} \text{ converge.}}$$

On définit donc, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\partial^m S_a(x) := \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n x^{n-m}$.

II.2. Montrer que la fonction S_a est croissante sur D_a.

Soient $x_1 < x_2 \in \mathrm{D}_a$, donc $0 \leqslant x_1$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1^n \leqslant x_2^n$ car $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Puis comme a_n est positif : $a_n x_1^n \leqslant a_n x_2^n$.
Et donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} a_n x_1^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x_2^n$.
Enfin, ces deux suites de sommes partielles sont convergentes car $x_1, x_2 \in \mathrm{D}_a$,
on peut donc passer à la limite et garder le sens de l'inégalité :

$$S_a(x_1) \leqslant S_a(x_2)$$

/1

$$\boxed{\text{La fonction } S_a \text{ est croissante sur } \mathrm{D}_a.}$$

On admet que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\partial^m S_a$ est également une fonction croissante sur $[0,1[$.

II.3. Propriété analytique de la fonction S_a.
Soit $x_1 < x_2 \in [0,1[$.

(a) Montrer que $S_a(x_2) - S_a(x_1) = (x_2 - x_1) \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(\sum_{h=0}^{k-1} x_1^h x_2^{k-h-1} \right)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on applique la formule des petits Bernoullis :

$$a_n x_2^n - a_n x_1^n = a_n(x_2^n - x_1^n) = a_n(x_2 - x_1)\sum_{h=0}^{n-1} x_2^h x_1^{n-1-h}$$

Passons aux sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x_2^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x_1^n = a_0 - a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n(x_2^n - x_1^n) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x_2 - x_1)\sum_{h=0}^{n-1-h} x_2^h x_1^{n-h-1}$$

La somme de gauche est convergente, donc celle de droite également (tout est positif).
On peut donc passer à la limite ($N \to +\infty$) /2

$$\boxed{S_a(x_2) - S_a(x_1) = (x_2 - x_1)\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(\sum_{h=0}^{k-1} x_1^h x_2^{k-h-1}\right).}$$

(b) En déduire $(x_2 - x_1)\partial S_a(x_1) \leqslant S_a(x_2) - S_a(x_1) \leqslant (x_2 - x_1)\partial S_a(x_2)$.

Comme $x_1 \leqslant x_2$, on a pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$,

$$x_1^{n-1} \leqslant x_1^h x_2^{n-h-1} \leqslant x_2^{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad n x_1^{n-1} = \sum_{h=0}^{n-1} x_1^{n-1} \leqslant \sum_{h=0}^{n-1} x_1^h x_2^{n-1-h} \leqslant \sum_{h=0}^{n-1} x_2^{n-1} = n x_2^{n-1}$$

On en déduit d'après le calcul précédent ($x_2 - x_1 \geqslant 0$) : /1

$$\boxed{(x_2 - x_1)\partial S_a(x_1) = (x_2 - x_1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_1^{n-1} \leqslant S_a(x_2) - S_a(x_1) \leqslant (x_2 - x_1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_2^{n-1} = (x_2 - x_1)\partial S_a(x_2).}$$

(c) En déduire que S_a est continue sur $[0, 1[$.

Soit $x \in [0, 1[$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $0 < x - \epsilon < x < x + \epsilon < 1$.
Pour tout $t \in]x - \epsilon, x + \epsilon[(\subset]0, 1[)$, d'après la question précédente et la croissance de ∂S :
— Cas $x > t$, c'est direct avec $x_2 \leftarrow x$ et $x_1 \leftarrow t$:

$$(x - t)\partial S_a(x - \epsilon) \leqslant (x - t)\partial S_a(t) \leqslant S_a(x) - S_a(t) \leqslant (x - t)\partial S_a(x) \leqslant (x - t)\partial S_a(x + \epsilon)$$

— Cas $x < t$, c'est direct avec $x_2 \leftarrow t$ et $x_1 \leftarrow x$:

$$(t - x)\partial S_a(x - \epsilon) \leqslant (t - x)\partial S_a(x) \leqslant S_a(t) - S_a(x) \leqslant (t - x)\partial S_a(t) \leqslant (t - x)\partial S_a(x + \epsilon)$$

Dans tous les cas, en prenant la valeur absolue ($\partial S_a(u) \geqslant 0$) :

$$|x - t|\partial S_a(x - \epsilon) \leqslant |S_a(x) - S_a(t)| \leqslant |x - t|\partial S_a(x + \epsilon)$$

Le terme de gauche et de droite converge vers 0, pour $t \to x$, donc /2

$$\boxed{S_a \text{ est continue en tout } x \in [0, 1[. \text{ Donc } S_a \text{ est continue sur } [0, 1[.}$$

(d) Montrer que S_a est dérivable sur $[0, 1[$ et que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$S_a'(x) = \partial S_a(x)$$

Notons d'abord que ∂S_a est également continue sur $[0,1[$.

On peut en effet appliquer le même raisonnement que précédemment pour $a_n \leftarrow n a_n$.

Le fait que (a_n) soit bornée n'a joué aucun rôle pour démontrer la continuité de S_a.

$$\boxed{\partial S_a \text{ est continue sur } [0,1[.}$$

Soit $x \in [0,1[$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $0 < x-\epsilon < x < x+\epsilon < 1$.

Pour tout $t \in]x-\epsilon, x+\epsilon[(\subset]0,1[)$, d'après la question précédente et la croissance de ∂S :

$$\partial S_a(x-\epsilon) \leqslant \underbrace{\frac{S_a(x)-S_a(t)}{x-t}}_{\text{à considérer si } x>t} = \underbrace{\frac{S_a(t)-S_a(x)}{t-x}}_{\text{à considérer si } x<t} \leqslant \partial S_a(x+\epsilon)$$

Soit $\eta > 0$.

∂S_a est continue en x (et croissante), donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} \partial S_a(x+\epsilon) \leqslant \partial S_a(x) + \eta \\ \partial S_a(x-\epsilon) \geqslant \partial S_a(x) - \eta \end{array} \right.$.

Donc $\exists\ \epsilon > 0$, tel que $\forall\ t \in]x-\epsilon, x+\epsilon[$, $\left| \dfrac{S_a(x)-S_a(t)}{x-t} - \partial S_a(x) \right| \leqslant \eta$. /3

$$\boxed{S_a \text{ est dérivable sur } [0,1[\text{ et que pour tout } x \in [0,1[,\ S_a'(x) = \partial S_a(x).}$$

On notera que ce résultat se démontre sans tenir compte du fait que (a_n) est bornée.
Seules les convergences des séries à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1}$ pour $x \in [0,1[$, sont importantes.

II.4. (a) Montrer que S_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$, et que

$$\forall\ h \in \mathbb{N}, \forall\ x \in [0,1[, \qquad S_a^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h}$$

On démontre le résultat par récurrence sur $h \in \mathbb{N}$.

Posons donc pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_h$, « S_a est h fois dérivable sur $[0,1[$ et $S_a^{(h)} : x \mapsto \sum_{k=h}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h}$ ».

— D'après la question précédente, le résultat est vraie pour $h = 1$.
— Soit $h \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_h$ est vraie.
  Donc S_a est dérivable h fois et $S_a^{(h)} = \partial^h S_a$.
  Cette dernière fonction, s'écrit comme une somme de fonctions : $\partial^h S_a : x \mapsto \sum_{k=h}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h}$.
  On peut appliquer à celle-ci $\partial^h S_a$, puisque d'après la remarque, seule la convergence des séries compte.
  Ainsi $\partial^h S_a$ est dérivable sur $[0,1[$ et $(\partial^h S_a)'(x) = \sum_{n=h}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-h+1)(n-h) a_n x^{n-h-1} = \partial^{h+1} S_a(x)$.
  Ainsi, S_a est dérivable $(h+1)$ fois et $S_a^{(h+1)} = \partial^{h+1} S_a$ /2

$$\boxed{S_a \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0,1[, \text{ et } \forall\ h \in \mathbb{N}, \forall\ x \in [0,1[, S_a^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h}.}$$

(b) Que vaut $\dfrac{S_a^{(h)}(0)}{h!}$?

D'après la question précédente :

$$S_a^{(h)}(x) = \underbrace{\frac{h!}{0!} a_h x^0}_{k=h} + x \sum_{k=h+1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-h)!} a_k x^{k-h-1}$$

Donc en $x=0$: /0,5

$$\boxed{S_a^{(h)}(0) = h! a_h \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{S_a^{(h)}(0)}{h!} = a_h.}$$

(c) En déduire que si pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ (série convergente),
alors nécessairement $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

On a pour tout $x \in [0,1[$, $S_a(x) = S_b(x)$, donc $S_a = S_b$.
Mais d'après les questions précédentes, S_a et S_b sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $h \in \mathbb{N}$, $S_a^{(h)} = S_b^{(h)}$.
Puis /1,5

$$\boxed{\forall\ h \in \mathbb{N}, a_h = \frac{S_a^{(h)}(0)}{h!} = \frac{S_b^{(h)}(0)}{h!} = b_h.}$$

II.5. Produit de Cauchy.
On considère pour cette question uniquement, deux suites bornées $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$

$$\sum_{k=0}^{p} c_k x^k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{p} b_k x^k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{2p} c_k x^k$$

Effectuons le calcul :

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x^k \times \sum_{k=0}^{p} b_k x^k = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i \times \sum_{j=0}^{p} b_j x^j = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p} (a_i b_j) x^{i+j}$$

Posons $s = i+j$ dans la somme intérieure (c'est donc un changement de j par s) :

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x^k \times \sum_{k=0}^{p} b_k x^k = \sum_{i=0}^{p}\sum_{s=i}^{i+p} (a_i b_{s-i}) x^s$$

Ensuite, si on note $E = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{p}\left(\bigcup_{s=i}^{i+p}\{(i,s)\}\right) = \{(i,s) \mid 0 \leqslant i \leqslant p, i \leqslant s \leqslant p+i\}$,
le calcul cherché est le même que $\displaystyle\sum_{(i,s)\in E} a_i b_{s-i} x^s$. On va décomposer E.
En effet si $A \subset E \subset B$, alors comme les termes $a_i b_{s-i} x^s \geqslant 0$, nécessairement :

$$\sum_{(i,s)\in A} a_i b_{s-i} x^s \leqslant \sum_{(i,s)\in A} a_i b_{s-i} x^s + \underbrace{\sum_{(i,s)\in E\setminus A} a_i b_{s-i} x^s}_{\geqslant 0} = \sum_{(i,s)\in E} a_i b_{s-i} x^s \leqslant \sum_{(i,s)\in B} a_i b_{s-i} x^s$$

Et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} c_k x^k = \sum_{s=0}^{p}\left(\sum_{i=0}^{s} a_i b_{s-i} x^s\right) = \sum_{(i,s)\in A} a_i b_{s-i} x^s$, avec $A = \{(i,s) \mid 0 \leqslant i \leqslant s \leqslant p\}$.
Or si $(i,s) \in A$, nécessairement : $0 \leqslant i \leqslant p$ et $i \leqslant s \leqslant p+i$, donc $(i,s) \in E$ et $A \subset E$.
Puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p} c_k x^k = \sum_{s=0}^{2p}\left(\sum_{i=0}^{s} a_i b_{s-i} x^s\right) = \sum_{(i,s)\in B} a_i b_{s-i} x^s$, avec $B = \{(i,s) \mid 0 \leqslant i \leqslant s \leqslant 2p\}$.
Or si $(i,s) \in E$, nécessairement : $0 \leqslant i \leqslant s$ et $s \leqslant i+p \leqslant p+p = 2p$, donc $(i,s) \in B$ et $B \subset E$.
Finalement : /2,5

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} c_k x^k = \sum_{(i,s)\in A} a_i b_{s-i} x^s \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{p} b_k x^k\right) = \sum_{(i,s)\in E} a_i b_{s-i} x^s \leqslant \sum_{k=0}^{2p} c_k x^k = \sum_{(i,s)\in B} a_i b_{s-i} x^s}$$

(b) En déduire que $\forall\, x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = S_a(x) \times S_b(x)$.

Soit $x \in [0,1[$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme partielle $\sum_{k=0}^{p} c_k x^k$ est donc majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \times \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = S_a(x) \times S_b(x)$ (ce sont des séries à termes positifs).

Donc la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{p} c_k x^k\right)_p$ est majorée.

Et comme il s'agit d'une série à terme positives, ceci est suffisant pour pouvoir affirmer que

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k \text{ converge.}}$$

Et par conservation de l'inégalité, on a $S_{a*b}(x) \leqslant S_a(x) \times S_b(x)$.

Mais par ailleurs, maintenant que la convergence est assurée, on peut également passer à la limite sur l'inégalité de droite.

On trouve $S_a(x) \times S_b(x) \leqslant S_{a*b}(x)$.

Par double inégalité : /2,5

$$\boxed{\forall\, x \in [0,1[,\ S_{a*b}(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = S_a(x) \times S_b(x).}$$

On note alors S_{a*b}, l'application $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, définie sur $[0,1[$ (au moins), même si (c_n) n'est pas bornée.

III - Série génératrice de Stirling

On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite ${}_ka$, définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $({}_ka)_n = \dfrac{s(n,k)}{n!}$.

III.1. Montrer que ${}_ka$ est une suite bornée.

On a vu en première partie que $\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = \text{card}(S_n) = n!$.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, ${}_ka_n = \dfrac{s(n,k)}{n!} \leqslant 1$ /1

$$\boxed{({}_ka_n) \text{ est une suite bornée.}}$$

On note alors $L_k : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} ({}_ka)_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{s(n,k)}{n!} x^n$.

D'après la partie précédente, L_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

III.2. Calcul de L_1.

(a) Soit $x \in [0,1[$. Quel est le terme général de série qui définie le nombre $L_1(x)$?
On attend une réponse, où les termes $s(n,k)$ ont été remplacés par leur valeur.

On a vu également que $s(n,1) = (n-1)!$.

Donc pour tout $x \in [0,1[$, /1

$$\boxed{L_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n}$$

(b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$

$$-\ln(1-x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{x^j}{j} + \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On sait que pour tout $t \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} t^j = \frac{1-t^N}{1-t}$, donc $\displaystyle\frac{1}{1-t} = \sum_{j=0}^{N-1} t^j + \frac{t^N}{1-t}$.

On peut intégrer cette égalité pour t entre 0 et $x(< 1)$:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^x t^j \mathrm{d}t + \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t$$

Or une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est $t \mapsto -\ln(1-t)$ et de $t \mapsto t^j$ est $t \mapsto \dfrac{t^{j+1}}{j+1}$. Donc

$$-\ln(1-x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j+1} x^{j+1} - 0 + \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t$$

Ainsi, en faisant un changement de variable dans la somme : /2

$$\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{x^j}{j} + \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t}$$

(c) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $L_1(x) = -\ln(1-x)$.

Soit $x \in [0,1[$, fixé.

On a donc

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n} x^n + \ln(1-x)\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t\right| = \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t$$

par positivité de tous les termes dans l'intégrale et du fait : $x > 0$. Or pour tout $t \in [0,x[$, $\dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n} x^n + \ln(1-x)\right| \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^N \mathrm{d}t = \frac{1}{N+1}\frac{x^{N+1}}{1-x} \leqslant \frac{1}{N+1}\frac{1}{1-x}$$

Or (x étant fixé), $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(N+1)(1-x)} = 0$, donc par encadrement : $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n} x^n\right)_N$ converge vers /2

$$\boxed{L_1(x) = -\ln(1-x)}$$

III.3. En exploitant la relation $(\star)$, montrer la relation

$$\forall\, k \geqslant 1, \forall\, x \in [0,1[, \quad (x-1)L'_{k+1}(x) = -L_k(x)$$

Soit $x \in [0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant n$.

$L_{k+1}(x)$ est la série de terme général : $\dfrac{s(n,k+1)}{n!} x^n$.

Et d'après la partie précédente, $L'_{k+1}(x)$ est la série de terme général : $n\dfrac{s(n,k+1)}{n!}x^{n-1} = \dfrac{s(n,k+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$.
Le produit de Cauchy avec $(1-x) = 1 - x + 0x^2 + \dots$ donne :
$(1-x)L'_{k+1}(x)$ est la série de terme général :

$$\left[\frac{s(n+1,k+1)}{n!}\times 1 - \frac{s(n,k+1)}{(n-1)!}\times 1\right]x^n = \frac{1}{n!}\left[s(n+1,k+1) - ns(n,k+1)\right]x^n$$

Or d'après $(\star)$ en $k+1$: $s(n+1,k+1) - ns(n,k+1) = s(n,k)$.
Donc $(1-x)L'_{k+1}(x)$ est la série de terme général $\dfrac{s(n,k)}{n!}x^n$, c'est donc le terme général de $L_k(x)$ /2

$$\boxed{\forall\, k \geqslant 1, \forall\, x \in [0,1[, \quad (1-x)L'_{k+1}(x) = L_k(x)}$$

III.4. En déduire, par récurrence, que

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad L_k(x) = -\frac{\big(\ln(1-x)\big)^k}{k!}$$

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_k$: « $\forall\, x \in [0,1[$, $L_k(x) = \dfrac{\big(-\ln(1-x)\big)^k}{k!}$ ».

— Pour tout $x \in [0,1[$, $L_1(x) = -\ln(1-x) = \dfrac{(-\ln(1-x))^1}{1!}$ (d'après III.2.), donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}_k$ est vraie.
Donc $\forall\, x \in [0,1[$, $L_k(x) = \dfrac{\big(-\ln(1-x)\big)^k}{k!}$.
Puis $\forall\, x \in [0,1[$, $(1-x)L'_{k+1}(x) = L_k(x)$, donc

$$L'_{k+1}(x) = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{(\ln(1-x))^k}{1-x} = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}u' \times u^k$$

avec $u = \ln(1-x)$ et $u' = \dfrac{-1}{1-x}$. On peut donc intégrer

$$L_{k+1}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\times\frac{1}{k+1}\Big[u^{k+1}(t)\Big]_0^x = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\left(\ln(1-x)\right)^{k+1}$$

(car $k-1$ et $k+1$ ont même parité) Donc $\mathcal{Q}_{k+1}$ est vraie.

Ainsi, par récurrence : /2

$$\boxed{\forall\, x \in [0,1[,\ L_k(x) = \frac{\big(-\ln(1-x)\big)^k}{k!}}$$

III.5. Soit $x \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$, quelconques et fixés.
Dans ces questions, on démontre un résultat énoncé plusieurs fois en cours, et généralisé ici.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} L_k(x)t^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x)t^k = (1-x)^{-t}$$

Soit $x \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$ Notons $s = -\ln(1-x)t \in \mathbb{R}$, on a vu dans le cours que $e^s = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{s^k}{k!}$ converge et /2

$$\boxed{(1-x)^{-t} = \exp\big(-t\ln(1-x)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\ln(1-x))^k}{k!}t^k}$$

(b) On admet que si pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $b_{n,k} \geqslant 0$ et si $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n,k}\right)$ converge,

alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\right)$ converge également et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\right)$.

Nous démontrerons ce résultat plus tard dans l'année.

Montrer que pour $t > 0$

$$(1-x)^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}x^n$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in [0,1[$. Ici $b_{n,k} = \dfrac{s(n,k)}{n!}x^n t^k \geqslant 0$.

Puis pour $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant k} b_{n,k}$ converge et sa limite vaut $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n,k} = L_k(x)t^k$,

puis (encore), $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} L_k(x)t^k$ converge et sa limite vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x)t^k = (1-x)^t$ d'après (a)

On peut donc appliquer le résultat admis ici :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n,k}\right)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\right)$.

Ici, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}$ est une somme finie qui vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{s(n,k)}{n!}x^n t^k = \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k = \frac{x^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t+k) = \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}x^n$$

d'après le résultat obtenu en fin de partie I.

Il s'agit ensuite de sommer pour n de 0 à $+\infty$, la limite (=somme) étant connue : /3

$$\boxed{(1-x)^{-t} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}x^n.}$$

Remarques !

Si $t \in \mathbb{R}$, et $x \in]-1,1[$ l'interversion marche également (car famille sommable), on a

$$(1+x)^t = (1-(-x))^t = \sum_{k=0}^{+\infty} L_k(-x)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+k}s(n,k)}{n!}x^n(-t)^k\right)$$

$$(1+x)^t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}s(n,k)(t)^k\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}x^n$$

III.6. Calcul explicite de $s(n,k)$.

(a) Soit $n,k \in \mathbb{N}$, quel est le cardinal de $C(n,k) = \{(n_1,\dots n_k) \in \mathbb{N}^* \mid n_1+n_2+\dots+n_k = n\}$

Attention, ici, les nombres n_1 sont strictement positifs.

On va plutôt raisonner sur les k-uplets $(n_1-1, n_2-1, \dots n_k-1) = \Psi(n_1,\dots n_k)$.

Ψ est clairement bijective. Nécessairement, $n_i - 1 \in \mathbb{N}$ et enfin

$$(n_1,\dots n_k) \in C(n,k) \Longleftrightarrow (n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_k-1) = n_1+n_2+\dots+n_k-k = n-k$$

On raisonne ensuite sur les applications croissantes (cf exercice dans le cours), ou plus assurément sur les $n-k$ boules et $k-1$ cloisons possibles.

Chacune de ces $\binom{(n-k)+(k-1)}{k-1} = \binom{(n-k)+(k-1)}{n-k}$ configurations définissant bijectivement un unique k-uplet d'entiers strictement positifs $(n_1, n_2, \dots n_k)$ tel que $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$. /2

$$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Card}(C(n,k)) = \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}.}$$

(b) En exploitant k produits de Cauchy, montrer que

$$s(n,k) = \frac{n!}{k!} \sum_{(n_1,\dots n_k)\in C(n,k)} \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$k! \times L_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k!}{n!} s(n,k) x^n = (-\ln(1-x))^k = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\right)^k$$

On va calculer le développement de L_1^k sous forme de série, par récurrence.
On pourra ensuite faire une identification d'après II.4.(c).

Le produit de Cauchy de $L_1(x)$ avec une série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, donne la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{h_1+h_2=n, h_1\geqslant 1, h_2\geqslant 1} \frac{a_{h_1}}{h_2}\right) x^n$

Par récurrence, le terme général de la série $L_1^k(x)$ est donc

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\sum_{h_1+h_2+\cdots+h_k=n, h_j\geqslant 1} \frac{1}{h_1}\frac{1}{h_2}\cdots\frac{1}{h_k}\right) x^n$$

On peut alors identifier les termes généraux : /3

$$\boxed{s(n,k) = \frac{n!}{k!} \sum_{(n_1,\dots n_k)\in C(n,k)} \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k}}$$

(c) Supposons, en outre que n est un nombre premier et $k \geqslant 2$.
Montrer que $s(n,k) \equiv 0[n]$.

Supposons que n est un nombre premier et $k \in [\![2, n-1]\!]$. Si $(n_1, n_2, \dots n_k) \in C(n,k)$, alors $n_1 \geqslant 1$, et pour tout $j \in \mathbb{N}_k$, $1 \leqslant n_j < n$.

Or n est un nombre premier donc $n_j \wedge n = 1$.

On a donc pour tout $(n_1, n_2, \dots n_k) \in C(n,k)$, le dénominateur de $\frac{1}{n_1 n_2 \times \cdots n_k}$ est premier avec n.

Donc la fraction $\sum_{(n_1,\dots n_k)\in C(n,k)} \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k} = \frac{Q}{R}$ a un dénominateur noté R égal au PPCM de chacun des dénominateurs, chacun premier avec n.
Donc $R \wedge n = 1$. Puis, on a vu que $k! \times R \times s(n,k) = n! \times Q$. Donc $n | k! \times R \times s(n,k)$.
Or $n \wedge k = 1$ (n premier et $k < n$) et $n \wedge R = 1$, donc $n | s(n,k)$ (Lemme de Gauss). /2

$$\boxed{s(n,k) \equiv 0[n].}$$
