Devoir surveillé n°8

Sujet donné le samedi 26 mars 2022, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Exercice -

.1. Calculer les deux limites :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

.2. Donner le développement limité de $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$ et à l'ordre 4.

.3. Donner un développement limité généralisé à l'ordre 3 de $g : x \mapsto x\mathrm{ch}\dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Problème - Matrices de Kac-Clément

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels
  et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$. On s'interdira d'utiliser cette lettre à tout autre usage !
- On dit que A et B sont $\mathbb{R}$-semblables (resp. $\mathbb{C}$-semblable), noté : $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} B$ (resp. $A \underset{\mathbb{C}}{\sim} B$).
  si il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) telle que $A = P \times B \times P^{-1}$.
- On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (respectivement dans $\mathbb{C}$)
  si il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) diagonale telles que $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} D$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ respectivement).
- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A (\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ si $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$,
  de manière équivalente : si il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul, tel que $AX = \lambda X$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
  L'espace $E_\lambda(A) := \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ s'appelle alors l'espace propre de A associée à la valeur propre λ.
- On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ (resp.$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$), l'ensemble des valeurs propres réelles (resp. complexes) de A. On a : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
- On rappelle que si $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $T(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$ (avec $A^0 = I_n$).

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX^e siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Ce problème est divisé en quatre parties largement indépendantes. La **Partie I** permet d'étudier des critères de diagonalisation de matrices. La **Partie II** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties III** et **IV**.

I - Valeurs propres et diagonalisation

I.1. Montrer que $\underset{\mathbb{C}}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *La définition de* $\underset{\mathbb{C}}{\sim}$ *est donnée dans l'introduction..*

I.2. Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$.
On admet que le résultat est encore vrai pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I.3. Montrer que si $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$, alors pour tout polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$, $T(A) \underset{\mathbb{K}}{\sim} T(B)$

I.4. Montrer que si D est la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(D) = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$.

I.5. Soit $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $T(A) = 0$ (annulateur de A), alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \mathcal{Z}(T)$ (ensemble des racines de T).
On pourra commencer par montrer par récurrence que si $A \times X = \lambda \cdot X$, *alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $A^k \times X = \lambda^k \cdot X$.

I.6. (*) Montrer que si A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, alors il existe un polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$, scindé et à racines simples tel que $T(A) = 0$

I.7. Notons $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r\}$ l'ensemble des valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$. Soit $(Z_1, \dots, Z_r) \in E_{\lambda_1}(A) \times \cdots \times E_{\lambda_r}(A)$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} Z_j = 0$

(a) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \lambda_j^s \cdot Z_j = 0$

(b) On fixe $j \in [\![1, r]\!]$, et on note $L_j = \displaystyle\prod_{k \neq j} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$. Pour $h \in [\![1, r]\!]$, que vaut $L_j(\lambda_h)$?

(c) On suppose que L_j se développe sous la forme $\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1} \ell_s X^s$.
Calculer de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1} \sum_{h=1}^{r} (\ell_s \lambda_h^s \cdot Z_h)$. En déduire : $Z_j = 0$.

On a donc démontré qu'on a la somme directe : $\oplus_{j=1}^{r} E_{\lambda_j}(A)$.

(d) En déduire que $\dim \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{r} E_{\lambda}(A) \right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \dim \big(E_{\lambda_j}(A)\big)$.

(e) Supposons que $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \dim \big(E_{\lambda_j}(A)\big) = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = n$.
Montrer, en considérant une base adaptée à cette décomposition de E, que A est alors diagonalisable.

Bilan :
Soit A une matrice à coefficient sur $\mathbb{K}$ et $T_A \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme annulateur de A (i.e. $T_A(A) = 0$).
Pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$, donc semblable à une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
il faut que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $T_A(\lambda_k) = 0$ (en combinant 2., 4. & 5.).
Cela donne une condition nécessaire, et un moyen de réduire les candidats-valeurs propres de A.
Pour que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et semblable à $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$,
(il faut et) il suffit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dim E_{\lambda_k}(A) = n$ où $E_{\lambda_k}(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)$ (7.).
Cela donne une condition suffisante pour diagonaliser A.
Mis en ensemble, ces deux résultats donne un *algorithme* pour savoir si une matrice est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
On a aussi démontré que A est annulée par un polynôme scindé à racines simples (s)si A est diagonalisable.

II - La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.1. Calculer $A^3 - 4A$. On note μ_A, le polynôme $X^3 - 4X$

II.2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants.
On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.

II.3. On considère $\mu_B = i\mu_A(-iX)$. Montrer que $\mu_B \in \mathbb{R}[X]$ et que $\mu_B(B) = 0$ (la matrice nulle).
Décomposer μ_B en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$.

II.4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants.
On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

II.5. Exprimer $D^{-1} \times A \times D$ à l'aide de la matrice B.

III - Etude d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \ / \ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

III.1. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.
On pourra raisonner avec un équivalent, en 0 de la fonction $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_f$.

III.2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & V_n & \longrightarrow & V_n \\ & f & \longmapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

III.3. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.

III.4. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad g_k \in V_n$.

III.5. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

III.6. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

III.7. Ecrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\ker(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$.

IV - Les matrices de Kac de taille $n+1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :
- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k, l) \in [\![1, (n+1)^2]\!]$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k-ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

IV.1. Soient $M = (m_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{k\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des $m_{k,\ell}$ et des $d_{k,\ell}$, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des $m_{k,\ell}$ et des $d_{k,\ell}$.

IV.2. Montrer que $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie III**.

IV.3. Donner un polynôme $\mu_B \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de B_n, puis un polynôme $\mu_A \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de A_n.

IV.4. En déduire que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k - n$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et que :

$$\ker(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.

Correction

Exercice -

.1. Calculer les deux limites :
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

- Au voisinage de 0 :
$$x(e^x-1) = x(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))$$

/1
$$\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\left(1+\frac{1}{2}x+o(x)\right)^{-1} - 1\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}x + o(x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{en } 0^- \\ -\infty & \text{en } 0^+ \end{cases}$$

- Notons que pour $x \in \mathrm{D} \in \mathcal{V}_0$ (non précisé), $(\cos x)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\cos x\right)$.

Or, au voisinage de 0, $\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Donc $(\cos x)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}}$, par continuité de exp. /2

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-\frac{1}{2}}.}$$

.2. Donner le développement limité de $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ et à l'ordre 4.

On pose $h = x - \frac{\pi}{4}$, on a donc $x \to \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \to 0$.
On a alors
$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(h+\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\sin(h+\frac{\pi}{4})\right) = \ln\left(\sin h \sin\frac{\pi}{4} + \cos h\cos\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin h + \cos h)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)\right) \\
&= \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(1 + \underbrace{h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)}_{u}\right) \\
&= -\frac{\ln 2}{2} + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4) \\
&= -\frac{\ln 2}{2} + \left(h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(h - \frac{h^2}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}(h)^4 + o(h^4) \\
&= -\frac{\ln 2}{2} + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} - \frac{1}{2}\left(h^2 - 2\frac{h^3}{2} - 2\frac{h^4}{6} + \frac{h^4}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(h^3 - 3\frac{h^4}{2}\right) - \frac{1}{4}(h^4) + o(h^4) \\
&= -\frac{\ln 2}{2} + h + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)h^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)h^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)h^4 \\
&= -\frac{\ln 2}{2} + h - h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{2}{3}h^4 + o(h^4)
\end{aligned}$$

/4

$$\boxed{\text{Au voisinage de } \frac{\pi}{4},\ f(x) = -\frac{\ln 2}{2} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right)}$$

.3. Donner un développement limité généralisé à l'ordre 3 de $g : x \mapsto x\mathrm{ch}\frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

On pose $h = \frac{1}{x}$, on a l'équivalence $x \to +\infty \Leftrightarrow h \to 0^+$.
Au voisinage de $+\infty$ pour x ou 0^+ pour h,
$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{u}\mathrm{ch}(u) = \frac{1}{2u}\left(e^u + e^{-u}\right) = \frac{1}{2u}\left(2 + 2\frac{1}{2}u^2 + 2\frac{1}{24}u^4 + o(u^4)\right) \\
&= \frac{1}{u} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{24}u^3 + o(u^3)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Au voisinage de } +\infty,\ g(x) = x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).}$$ /2

Problème - Matrices de Kac-Clément

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels
  et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$. On s'interdira d'utiliser cette lettre à tout autre usage !
- On dit que A et B sont $\mathbb{R}$-semblables (resp. $\mathbb{C}$-semblable), noté : $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} B$ (resp. $A \underset{\mathbb{C}}{\sim} B$).
  si il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) telle que $A = P \times B \times P^{-1}$.
- On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (respectivement dans $\mathbb{C}$)
  si il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) diagonale telles que $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} D$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ respectivement).
- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A (\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ si $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$,
  de manière équivalente : si il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul, tel que $AX = \lambda X$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
  L'espace $E_\lambda(A) := \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ s'appelle alors l'espace propre de A associée à la valeur propre λ.
- On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ (resp.$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$), l'ensemble des valeurs propres réelles (resp. complexes) de A. On a : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
- On rappelle que si $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $T(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$ (avec $A^0 = I_n$).

I - Valeurs propres et diagonalisation

I.1. Montrer que $\underset{\mathbb{C}}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *La définition de $\underset{\mathbb{C}}{\sim}$ est donnée dans l'introduction..*

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A = I_n \times A \times I_n^{-1}$.

Donc $A \underset{\mathbb{C}}{\sim} A$, car $I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. Donc $\underset{\mathbb{C}}{\sim}$ est réflexif.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \underset{\mathbb{C}}{\sim} B$.

Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$, donc $B = P^{-1}AP$.
Et comme $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$, $B \underset{\mathbb{C}}{\sim} A$. Donc $\underset{\mathbb{C}}{\sim}$ est symétrique.

- Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $A \underset{\mathbb{C}}{\sim} B$ et $B \underset{\mathbb{C}}{\sim} C$.

Alors il existe $P_1, P_2 \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P_1 B P_1^{-1}$ et $B = P_2 C P_2^{-1}$
donc $A = P_1 P_2 C P_2^{-1} P_1^{-1} = (P_1 P_2) C (P_1 P_2)^{-1}$, avec $P_1 P_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ (groupe).
Donc $A \underset{\mathbb{C}}{\sim} C$. Donc $\underset{\mathbb{C}}{\sim}$ est transitif. /1,5

$$\boxed{\underset{\mathbb{C}}{\sim} \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

I.2. Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$.
On admet que le résultat est encore vrai pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Supposons que $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} B$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, soit $AP = PB$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) &\iff \exists\ X \neq 0 \text{ telle que } AX = \lambda X \iff \exists\ X \neq 0 \text{ telle que } PBP^{-1}X = \lambda X \\
&\iff \exists\ X \neq 0 \text{ telle que } B(P^{-1}X) = \lambda P^{-1}X \\
&\iff \exists\ Y (= P^{-1}X), \text{ réelles, non nul car } P^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ inversible telle que } BY = \lambda Y \\
&\iff \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)
\end{aligned}$$

Par double implication, qui signifie ici une double inclusion : /2,5

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B)}$$

I.3. Montrer que si $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$, alors pour tout polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$, $T(A) \underset{\mathbb{K}}{\sim} T(B)$

Supposons que $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$ et considérons $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$: « $A^k = P \times B^k \times P^{-1}$ ».

— Pour $k = 0$, on a $A^0 = I_n = P \times P^{-1} = P \times I_n \times P^{-1} = P \times B^0 \times P^{-1}$.
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Alors

$$A^{k+1} = A \times A^k = PBP^{-1} \times PB^kP^{-1} = PB(P^{-1}P)B^kP^{-1} = PBB^kP^{-1} = PB^{k+1}P^{-1}$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée. /1

Soit maintenant, $T \in \mathbb{K}[X]$. Supposons que $T = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Alors

$$T(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = \sum_{k=0}^{d} a_k PB^kP^{-1} = P \times \left(\sum_{k=0}^{d} a_k B^k\right) \times P^{-1} = P \times T(B) \times P^{-1}$$

Donc $T(A) \underset{\mathbb{K}}{\sim} T(B)$. /1

$$\boxed{\text{Si } A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B, \text{ alors } T(A) \underset{\mathbb{K}}{\sim} T(B) \text{ (avec la même matrice de passage !).}}$$

I.4. Montrer que si D est la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(D) = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$.

Soit λ une valeur propre de D, alors $\mathrm{Ker}(D - \lambda I_n) \neq \{0\}$ (plus grand).

Ce qui signifie exactement que la matrice $D - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Or celle-ci est diagonale, il s'agit de la matrice $D - \lambda I_n = \mathrm{diag}(\lambda_1 - \lambda, \dots \lambda_n - \lambda)$.

Une matrice diagonale est non-inversible si et seulement si un des coefficients sur la diagonale est nul.

Donc λ est valeur propre de D si et seulement si $\exists\, i \in \mathbb{N}_n$ tel que $\lambda_i - \lambda = 0$ i.e. $\lambda \in \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$. /2

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(D) = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}.}$$

I.5. Soit $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $T(A) = 0$ (annulateur de A). Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \mathcal{Z}(T)$ (ensemble des racines de T)

Soit λ une valeur propre de A.

Donc il existe un vecteur X non nul tel que $AX = \lambda X$.

Montrons alors par récurrence que $A^kX = \lambda^kX$.

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_k$: « $A^kX = \lambda^kX$ ».

— Pour $k = 0$, on a $A^0 = I_n$, donc $A^0X = X = \lambda^0X$.
Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_k$ est vraie. Alors

$$A^{k+1}X = A \times A^kX = A \times \lambda^kX = \lambda^kAX = (\lambda^k \times \lambda)X = \lambda^{k+1}X$$

Donc $\mathcal{Q}_{k+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée. /1,5

On a alors, en supposant que $T=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$:

$$0\times X = T(A)\times X = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right) X = \sum_{k=0}^{d} a_k (A^k X) = \sum_{k=0}^{d} (\lambda^k X) = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\right) X = T(\lambda)\cdot X$$

Or X est non nul, donc nécessairement, $T(\lambda)=0$. /1,5

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)\subset \mathcal{Z}(T).}$$

I.6. Montrer que si A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, alors il existe un polynôme $T\in\mathbb{K}[X]$, scindé et à racines simples tel que $T(A)=0$

Supposons que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
Alors A est semblable à une matrice diagonale, notée $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.
Notons $E=\{\lambda_i, i\in [\![1,n]\!]\}$, l'ensemble des éléments de la diagonale.
Peut-être que certains nombres aparraissent plusieurs fois dans D, ce n'est pas le cas dans l'ensemble E.
Considérons ensuite le polynôme $T=\prod_{\lambda\in E}(X-\lambda)$, c'est un polynôme scindé à racines simples.

Montrons ensuite que $T(D)=0$.

$$T(D)=\prod_{\lambda\in E}(D-\lambda I_n)$$

$T(D)$ est donc un produit de matrices (les $D-\lambda I_n$, pour $\lambda\in E$), chacune de ces matrices est diagonale,
le produit de matrice diagonale est une matrice diagonale,
dont les termes sur la diagonale sont les produits des termes au même place des matrices diagonales.
Formellement : $T(D)$ est diagonale et pour tout $k\in\mathbb{N}_n$,

$$[T(D)]_{k,k}=\prod_{\lambda\in E}([D-\lambda I_n]_{k,k})=\prod_{\lambda\in E}([D]_{k,k}-\lambda)=\prod_{\lambda\in E}(\lambda_k-\lambda)=0$$

car $\lambda_k\in E$.
Par conséquent, la matrice $T(D)$ est diagonale, avec que des 0 sur la diagonale. Donc $T(D)=0$. /3

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K}, \text{ alors il existe un polynôme } T\in\mathbb{K}[X], \text{ scindé et à racines simples tel que } T(A)=0.}$$

I.7. Notons $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_r\}$ l'ensemble des valeurs propres de A sur $\mathbb{K}$.

Soit $(Z_1,\dots,Z_r)\in E_{\lambda_1}(A)\times\cdots\times E_{\lambda_r}(A)$ tel que $\sum_{j=1}^{r} Z_j=0$

(a) Montrer que, pour tout $s\in\mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{r}\lambda_j^s\cdot Z_j=0$

Soit $s\in\mathbb{N}$. Multiplions $\sum_{j=1}^{r} Z_j=0$ par A^s, on a alors /1

$$\boxed{0=\sum_{j=1}^{r} A^s Z_j=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j^s\cdot Z_j}$$

d'après le calcul fait, par récurrence, en question 5.

(b) On fixe $j \in [\![1, r]\!]$, et on note $L_j = \prod_{k \neq j} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$. Pour $h \in [\![1, r]\!]$, que vaut $L_j(\lambda_h)$?

Si $h = j$, alors $L_j(\lambda_h) = 1$ (produit de $r - 1$ nombres égaux à 1).
Si $h \neq j$, alors il existe $k \in [\![1, r]\!] \setminus \{j\}$ tel que $k = j$, et donc un terme du produit est nul. Donc $L_j(\lambda_h) = 0$ /1,5

$$\boxed{\forall\ h \in \mathbb{N}_r, \quad L_j(\lambda_h) = \delta_{j,h}.}$$

(c) On suppose que L_j se développe sous la forme $\sum_{s=0}^{r-1} \ell_s X^s$.

Calculer de deux façons différentes $\sum_{s=0}^{r-1} \sum_{h=1}^{r} (\ell_s \lambda_h^s \cdot Z_h)$. En déduire : $Z_j = 0$.

Selon qu'on somme sur s, puis sur h :

$$\sum_{s=0}^{r-1} \sum_{h=1}^{r} (\ell_s \lambda_h^s Z_h) = \sum_{s=0}^{r-1} \ell_s \sum_{h=1}^{r} (\lambda_h^s Z_h) = \sum_{s=0}^{r-1} \ell_s \sum_{h=1}^{r} (0) = 0$$

ou dans l'autre sens :

$$\sum_{s=0}^{r-1} \sum_{h=1}^{r} (\ell_s \lambda_h^s Z_h) = \sum_{h=1}^{r} \left(\sum_{s=0}^{r-1} \ell_s \lambda_h^s \right) \cdot Z_h = \sum_{h=1}^{r} (L_j(\lambda_h))\, Z_h = 0 + \cdots + 0 + 1 \cdot Z_j + 0 + \cdots + 0 = Z_j$$

/2

$$\boxed{\text{On a donc } Z_j = 0.}$$

On a donc démontré qu'on a la somme directe : $\oplus_{j=1}^{r} E_{\lambda_j}(A)$.

(d) En déduire que $\dim \left(\sum_{j=1}^{r} E_\lambda(A) \right) = \sum_{j=1}^{r} \dim \left(E_{\lambda_j}(A) \right)$.

La somme étant directe, le résultat demandé est une application directe du cours : /0,5

$$\boxed{\dim \left(\sum_{j=1}^{r} E_\lambda(A) \right) = \dim \left(\oplus_{j=1}^{r} E_\lambda(A) \right) = \sum_{j=1}^{r} \dim \left(E_{\lambda_j}(A) \right)}$$

(e) Supposons que $\sum_{j=1}^{r} \dim \left(E_{\lambda_j}(A) \right) = \dim E$.
Montrer, en considérant une base adaptée à cette décomposition de E, que A est alors diagonalisable.

Considérons pour chaque espace propre $E_{\lambda_j}(A)$, une base $\mathcal{B}_j$.
Comme les espaces propres sont en somme direct, l'association (concaténation) des bases $\mathcal{B}_j$ donne donc au total une famille libre.
Par construction, cette association contient $\sum_{j=1}^{r} \dim \left(E_{\lambda_j}(A) \right) = \dim E$ éléments.
Il s'agit donc d'une base de E.
L'écriture de la matrice de l'application linéaire φ_A canoniquement associée à A dans cette nouvelle base est nécessairement diagonale (car chaque vecteur a pour image par A, un vecteur colinéaire à lui-même).
Cette nouvelle matrice, diagonale donc, est semblable à A. /2

$$\boxed{\text{Si } \sum_{j=1}^{r} \dim \left(E_{\lambda_j}(A) \right) = \dim E, \text{ alors } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Bilan :
Soit A une matrice à coefficient sur $\mathbb{K}$ et $P_A \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme annulateur de A (i.e. $P_A(A) = 0$).
Pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$, donc semblable à une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
il faut que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $P_A(\lambda_k) = 0$.
Cela donne une condition nécessaire, et un moyen de réduire les candidtats-valeurs propres de A.
Pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et semblable à $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$,
(il faut et) il suffit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dim E_\lambda(A) = n$.
Cela donne une condition suffisante pour diagonaliser A.
Mis en ensemble, ces deux résultats donne un *algorithme* pour savoir si une matrice est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
On a aussi démontré que A est annulée par un polynôme scindé à racines simples (s)si A est diagonalisable.

II - La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.1. Calculer $A^3 - 4A$. On note μ_A, le polynôme $X^3 - 4X$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 4A$$

/1

$$\boxed{\mu_A(A) = 0.}$$

II.2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants.
On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.

D'après la partie précédente, comme $\mu_A = X(X^2 - 4) = X(X - 2)(X + 2)$ est un polynôme scindé à racines simples qui annule A, les valeurs propres de A en sont des racines donc $\text{Sp}(A) \subset \{0, 2, -2\}$. (En fait, A est nécessairement diagonalisable d'après la réciproque de I.5.).
Montrons qu'elles sont bien valeurs propres, en montrant que $E_\lambda(A) \neq \{0\}$ pour $\lambda \in \{-2, 0, 2\}$ Or

- $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, non inversible, puisque $L_1 + L_3 = L_2$ et donc $\text{rg}(A + 2I_3) \leqslant 2$ i.e. $\dim(E_{-2}(A)) \geqslant 1$.
- $A + 0I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, non inversible, puisque $L_1 = L_3$ et donc $\text{rg}(A + 0I_3) \leqslant 2$ i.e. $\dim(E_0(A)) \geqslant 1$.
- $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, non inversible, puisque $L_1 + L_2 + L_3 = 0_3$ et donc $\text{rg}(A - 2I_3) \leqslant 2$ i.e. $\dim(E_2(A)) \geqslant$

1. La somme des dimensions des espaces propres est donc supérieure à 3, mais aussi inférieure à $3 = \dim \mathbb{R}^3$.
Donc d'après le critère de I.7. : /2,5

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}_\mathbb{R}(A) = \text{Sp}_\mathbb{C}(A) = \{-2, 0, 2\}.}$$

II.3. On considère $\mu_B = i\mu_A(-iX)$. Montrer que $\mu_B \in \mathbb{R}[X]$ et que $\mu_B(B) = 0$ (la matrice nulle).
Décomposer μ_B en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$.

/1,5

$$\boxed{\mu_B = i \times \left((-iX)^3 - 4(-iX)\right) = i \times (iX^3 + 4iX) = -X^3 - 4X = -X(X^2+4) = -X(X-2i)(X+2i) \in \mathbb{R}[X]}$$

Et

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -4B$$

/1

$$\boxed{\text{Donc } \mu_B(B) = B^3 + 4B = 0}$$

II.4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants.

Supposons que la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$,

alors elle serait semblable à une matrice diagonale, notée D_B dont les éléments sur la diagonale

λ sont des racines réelles de $X^3 + 4X = X(X-2i)(X+2i)$.

Donc cette matrice serait la matrice diagonale avec que des 0, i.e. la matrice nulle.

B serait semblable à la matrice nulle et serait donc nulle. Impossible. /1,5

$$\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$$

En revanche, sur $\mathbb{C}$, les valeurs propres de B sont 0, $2i$ et $-2i$.

On calcule les espaces propres comme précédemment pour A :

- $B + 2iI_3 = \begin{pmatrix} 2i & -1 & 0 \\ 2 & 2i & -2 \\ 0 & 1 & 2i \end{pmatrix}$, non inversible, puisque $L_1 - iL_2 - L_3 = 0$ et donc $\mathrm{rg}(B + 2iI_3) \leqslant 2$ i.e. $\dim(E_{-2i}(B)) \geqslant 1$.
- $B + 0I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, non inversible, puisque $L_1 = -L_3$ et donc $\mathrm{rg}(B + 0I_3) \leqslant 2$ i.e. $\dim(E_0(B)) \geqslant 1$.
- $B - 2iI_3 = \begin{pmatrix} -2i & -1 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 0 & 1 & -2i \end{pmatrix}$, non inversible, puisque $L_1 + iL_2 - L_3 = 0_3$ et donc $\mathrm{rg}(B - 2iI_3) \leqslant 2$ i.e. $\dim(E_{2i}(B)) \geqslant 1$.

Comme précédemment, la somme des dimensions vaut donc 3 et /1,5

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$$

II.5. Exprimer $D^{-1} \times A \times D$ à l'aide de la matrice B.

La matrice D est diagonale, donc son inverse s'obtient facilement (en inversant chaque terme de la diagonale).

Il suffit ensuite de faire le calcul : /1

$$\boxed{D^{-1} \times A \times D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -iB}$$

III - Etude d'un endomorphisme

Objectifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \;/\; (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

III.1. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.
On pourra raisonner avec un équivalent, en 0 de la fonction $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_f$.

Soient $\lambda_0, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$ (fonction nulle)

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{n-k}(x) = 0$.

Supposons que $\{k \in \mathbb{N}_n \mid \lambda_k \neq 0\} \neq \emptyset$.

Cet ensemble est non vide, inclus dans $\mathbb{N}$, majoré par n ;
il admet donc un plus grand élément, noté k_0. Ainsi, pour tout $k \geqslant k_0$, $\lambda_k = 0$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{n-k}(x) = 0$

On peut calculer un développement limité au voisinage de 0 :
$\forall\, h \in \mathbb{N}$, $\cos^h x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\sin^h x \underset{x\to 0}{\sim} x^h$.

$$\text{Donc } 0 = \sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{n-k}(x) = \sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k \left(x^{n-k} + o(x^{n-k})\right) = \lambda_{k_0} x^{n-k_0} + o(x^{n-k_0}).$$

On a nécessairement $\lambda_{k_0} = 0$ (l'équivalent d'une fonction nulle est 0).

On a donc une contradiction, ainsi $\{k \in \mathbb{N}_n \mid \lambda_k \neq 0\} = \emptyset$ /2

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (f_0, f_1, \ldots, f_n) \text{ est libre.}}$$

Par définition de V_n, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ en est une famille génératrice. C'est donc une base de V_n. /1

$$\boxed{\dim V_n = n + 1.}$$

III.2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n : V_n & \longrightarrow & V_n \\ f & \longmapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_k'(x) = -k\cos^{k-1}(x)\sin^{n-k+1}(x) + (n-k)\cos^{n+1}(x)\sin^{n-k-1}(x) = -kf_{k-1}(x) + (n-k)f_{k+1}(x)$$

/1

$$\boxed{\text{Donc } f_k' \in V_n.}$$

La matrice de φ_n s'écrit en écrivant l'image d'une base. Cela donne directement : /0,5

$$\boxed{B_n = \mathcal{M}_{(f_0,f_1,\dots f_n)}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).}$$

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

III.3. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i\sin x)^k(\cos x - i\sin x)^{n-k}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\cos x + i\sin x)^k(\cos x - i\sin x)^{n-k} = \left(e^{ix}\right)^k \times \left(e^{-ix}\right)^{n-k} = e^{ikx-(n-k)ix} = e^{i(2k-n)x} = g_k(x)$$

/1

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i\sin x)^k(\cos x - i\sin x)^{n-k}.}$$

III.4. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad g_k \in V_n$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned} g_k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} i^{k-j}\cos^j\sin^{k-j} \times \sum_{r=0}^{n-k}\binom{n-k}{r}(-i)^{n-k-r}\cos^r\sin^{n-k-r} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{r=0}^{n-k}\binom{k}{j}\binom{n-k}{r} i^{k-j}(-i)^{n-k-r}\cos^{r+j}\sin^{n-(r+j)} \end{aligned}$$

Posons $s = r+j$, dans la seconde somme (c'est r qui est remplacé par s). Donc s varie de j à $n-k+j$

$$\begin{aligned} g_k &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{s=j}^{n-k+j}\binom{k}{j}\binom{n-k}{s-j} i^{k-j}(-i)^{n-k-s+j}\cos^s\sin^{n-s} \\ &= \sum_{0\leqslant j\leqslant s\leqslant n-k \,\&\, s\leqslant n-k+j}\binom{k}{j}\binom{n-k}{s-j} i^{k-j}(-i)^{n-k-s+j}\cos^s\sin^{n-s} \\ &= \sum_{s=0}^{n}\left(\sum_{j=s+k-n}^{s}\binom{k}{j}\binom{n-k}{s-j} i^{k-j}(-i)^{n-k-s+j}\right) f_s \end{aligned}$$

/2

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad g_k \in V_n.}$$

III.5. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $= \varphi_n(g_k) = g'_k = i(2k-n)g_k$.
Ainsi, les vecteurs g_k sont des vecteurs propres de φ_n, chacun étant associé à la valeur propre $i(2k-n)$.

φ_n admet donc $n+1$ valeurs propres,
chaque espace propre associé est de dimension au moins 1 (puisque $g_k \in E_{i(2k-n)}$).
La somme des dimensions des espaces propres est donc au moins $n+1$.
Comme, elle ne peut dépasser ce nombre, nécessairement, chaque espace propre est de dimension 1. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi_n \text{ est diagonalisable. } \mathrm{Sp}(\varphi_n) = \{i(2k-n), k \in [\![0, n]\!]\} \text{ et } E_{i(2k-n)} = \mathrm{vect}(g_k).}$$

III.6. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

Pour être inversible (donc un automorphisme), il est nécessaire que 0 ne soit pas valeur propre de φ,
sinon $E_0 = \mathrm{Ker}\varphi_n$ est non réduit à 0.
Cela donne comme condition nécessaire : $\forall\ k \in [\![0, n]\!]$, $i(2k-n) \neq 0$, donc n n'est pas pair, donc impair.
Réciproquement,
si n est impair, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $i(2k-n) \neq 0$.
La matrice D, diagonale, semblable à B_n est donc inversible (dans $\mathbb{C}$),
puisqu'elle ne possède aucun 0 sur la diagonale.
Donc, par similarité (donc équivalence), le rang de B_n vaut n (sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{R}$).
Ainsi B_n est inversible. /2

$$\boxed{\varphi_n \text{ est donc un automorphisme de } V_n \text{ si et seulement si } n \text{ est impair.}}$$

III.7. Ecrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\ker(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$.

On a démontré en question 4. que pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned} g_n &= e^{i(2n-k)} = e^{in} = (\cos + i\sin)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^{n-k} \cos^k \sin^{n-k} \end{aligned}$$

/1

$$\boxed{g_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^{n-k} f_k}$$

Puis, génériquement, si $X = \mathcal{M}_{(f_0, f_1, \dots f_n)}(h)$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(B_n - inI_{n+1}) &\iff B_nX - inX = 0 \iff B_nX = inX \\ &\iff h \in \mathrm{Ker}(\varphi - in\mathrm{id}) = \mathrm{vect}(g_{2n-n}) = \mathrm{vect}(g_n) \end{aligned}$$

Donc /2

$$\boxed{\ker(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} i^n\binom{n}{0} & i^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & i^0\binom{n}{n} \end{pmatrix}^T}$$

IV - Les matrices de Kac de taille $n+1$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :
- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1,(n+1)^2]\!]$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k-ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

IV.1. Soient $M = (m_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{k\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des $m_{k,\ell}$ et des $d_{k,\ell}$, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des $m_{k,\ell}$ et des $d_{k,\ell}$.

Pour tout $(r,s) \in \mathbb{N}_p^2$, puisque $[D]_{r,k} = 0$ dès que $k \neq r$:

$$[DM]_{r,s} = \sum_{k=1}^{p} [D]_{r,k}[M]_{k,s} = \sum_{k=1,k\neq r}^{p} 0 \times [M]_{k,s} + [D]_{r,r}[M]_{r,s} = d_{rr}m_{rs}$$

$$[MD]_{r,s} = \sum_{k=1}^{p} [M]_{r,k}[D]_{k,s} = \sum_{k=1,k\neq s}^{p} [M]_{r,k} \times 0 + [M]_{r,s}[D]_{s,s} = m_{r,s}d_{s,s}$$

/1,5

$$\boxed{\forall\, r,s \in \mathbb{N}_n, \quad [DM]_{r,s} = d_{r,r}m_{r,s} \quad [MD]_{r,s} = d_{s,s}m_{r,s}}$$

IV.2. Montrer que $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie III**.

La matrice D_n^{-1} est également diagonale et $[D_n^{-1}]_{s,s} = \dfrac{1}{[D_n]_{s,s}} = \dfrac{1}{i^{s-1}} = (-i)^{s-1}$,

On a alors, pour $r,s \in \mathbb{N}_p$:

$$\begin{aligned}
[D_n^1 A_n D_n]_{r,s} &= [D_n^{-1}]_{r,r}[A_nD_n]_{r,s} && \text{car } D_n^{-1} \text{ diagonale}\\
&= (-i)^{r-1}[A_nD_n]_{r,s} = (-i)^{r-1}[A_n]_{r,s}[D_n]_{s,s} && \text{car } D_n \text{ diagonale}\\
&= (-i)^{r-1}i^{s-1}[A_n]_{r,s}
\end{aligned}$$

On a : $[A]_{r,s} = 0$ dès que $|r-s| \neq 1$.
Dans le cas $s = r-1$,

$$\begin{aligned}
[D_n^{-1}A_nD_n]_{r,r-1} &= (-1)^{r-1}i^{r-1}i^{r-2}[A_n]_{r,r-1} = (-1)^{r-1}i^{2(r-1)}i^{-1}[A_n]_{r,r-1} = -i[A_n]_{r,r-1}\\
&= -i(n-r+2) = -i[B]_{r,r-1}
\end{aligned}$$

Dans le cas $s = r+1$,

$$\begin{aligned}
[D_n^{-1}A_nD_n]_{r,r+1} &= (-1)^{r-1}i^{r-1}i^{r}[A_n]_{r,r+1} = (-1)^{r-1}i^{2(r-1)}i^{1}[A_n]_{r,r+1} = i[A_n]_{r,r+1}\\
&= ir = -i(-r) = -i[B]_{r,r+1}
\end{aligned}$$

/2

$$\boxed{D_n^{-1} \times A_n \times D = -iB_n}$$

IV.3. Donner un polynôme $\mu_B \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de B_n, puis un polynôme $\mu_A \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de A_n.

On a vu que B_n était semblable à la matrice diagonale $DB_n = \operatorname{diag}\big(i(2k-n)\big), k \in [\![0,n]\!]$).

Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - i(2k-n))$ est annulateur de DB_n.

Par similarité (question 1.6.), /1,5

$$\boxed{\mu_B = \prod_{k=0}^{n}(X - i(2k-n)) \text{ est annulateur de } B_n.}$$

Notons $\mu_A = \prod_{k=0}^{n}(X-(2k-n))$, alors comme $A_n \underset{\mathbb{C}}{\sim} -iB_n$ (question précédente) :

$$\mu_A(A_n) \underset{\mathbb{C}}{\sim} \mu_A(-iB_n) = \prod_{k=0}^{n}(-iB_n-(2k-n)I_{n+1}) = (-i)^{n+1}\prod_{k=0}^{n}(B_n-i(2k-n)I_{n+1}) = (-i)^{n+1}\mu_B(B_n)=0$$

Donc $\mu_A(A_n)$ est semblable à la matrice nulle. C'est nécessairement la matrice nulle. /1,5

$$\boxed{\mu_A = \prod_{k=0}^{n}(X-(2k-n)) \in \mathbb{R}[X] \text{ est annulateur de } A_n.}$$

IV.4. En déduire que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k-n$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et que :

$$\ker(A_n - nI_{n+1}) = \text{Vect}\begin{pmatrix}p_0 & p_1 & \cdots & p_n\end{pmatrix}^T,$$

où pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.

Les valeurs propres de A sont donc parmi les racines de μ_A, i.e.

$$\text{Sp}(A_n) \subset \{2k-n, k\in[\![0,n]\!]\} \subset \mathbb{R}$$

Ainsi A_n possède au plus $n+1$ valeurs propres, elles sont réelles.

Pour vérifier que ce sont bien TOUTES des valeurs propres, nous allons étudier les espaces propres E_{2k-n}, sur $\mathbb{C}$ dans un premier temps, puis $\mathbb{R}$ ensuite.
Puisque D_n est inversible, on peut faire le changement de variable $X = D_n \times Y$.
Posons finalement, pour la suite $Y = D_n^{-1}X \iff X = D_n\times Y$ (car $i^{-1}=-i$).

$$\begin{aligned} X\in \text{Ker}(A_n-(2k-n)I_{n+1}) &\iff A_nX=(2k-n)X \iff A_nD_nY=(2k-n)D_nY \\ &\iff D_n^{-1}A_nD_n\times Y = (2k-n)Y \iff -iB_nY=(2k-n)Y \\ &\iff B_nY = i(2k-n)Y \iff Y\in\text{Ker}(B_n-i(2k-n)I_{n+1}) \end{aligned}$$

L'espace propre pour B_n est $\text{Ker}(B_n-i(2k-n)I_{n+1})$ est de dimension 1 sur le corps $\mathbb{C}$.
Ainsi, sur $\mathbb{C}$, $\text{Ker}(A_n-(2k-n)I_{n+1})$ est de dimension 1, il s'agit de l'espace engendré par $D_n\times Y$ avec $Y\in \text{Ker}(B_n-i(2k-n)I_{n+1})$ (de dimension 1) et $Y\neq 0$.

Notons $X = D_n\times Y$, puis $X_1 = \text{Re}(X)$ et $X_2=\text{Im}(X)$. On a

$$AX=(2k-n)X \Rightarrow A(X_1+iX_2) = (2k-n)(X_1+iX_2) \Rightarrow AX_1=(2k-n)X_1 \text{ et } AX_2=(2k-n)X_2$$

Donc $\text{Ker}(A_n-(2k-n)I_{n+1})$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (sur le corps $\mathbb{R}$). /3

$$\boxed{\text{Sp}(A_n)\subset\{2k-n, k\in[\![0,n]\!]\}\subset\mathbb{R} \text{ et } A_n \text{ est diagonalisable.}}$$

(Mêmes arguments qu'en III.5.)
On a alors (sur $\mathbb{C}$, et finalement sur $\mathbb{R}$) :

$$X\in\text{Ker}(A-nI_{n+1}) \Leftrightarrow D_n^{-1}X\in\text{Ker}(B-inI_{n+1}) \Leftrightarrow X\in \text{vect}(D_n\times Q)$$

Or, puisque D_n est diagonale et Q une colonne (attention au décalage d'indice...) :

$$\forall\, j\in\mathbb{N}_{n+1},\quad [D_nQ]_j = [D_n]_{j,j}[Q]_j = i^{j-1}\times i^{n-(j-1)}\binom{n}{j-1} = i^n\binom{n}{j-1}$$

En prenant la partie réelle (si n est pair) ou imaginaire (si n est impair), on trouve donc /2

$$\boxed{\ker(A_n-nI_{n+1}) = \text{Vect}\begin{pmatrix}p_0 & p_1 & \cdots & p_n\end{pmatrix}^T, \text{où pour tout } k\in[\![0,n]\!], \text{ on note } p_k=\binom{n}{k}.}$$
