Devoir à la maison n°3
CORRECTION

Considérons la fonction g définie par l'expression $g(x) = \arccos(f(x))$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.

Par lecture du graphe de la fonction f,

$$g(x) \text{ a un sens } \iff f(x) \in [-1,1] \iff x \in [-1,1]$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le domaine de définition de } g \text{ est } [-1,1].}$$

(b) Montrer que $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

- **Méthode 1 : étude de fonction.**
Considérons la fonction $h : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos(x) + \arccos(-x) \end{array}$
h est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $]-1,1[$. De plus,
$$\forall x \in]-1,1[\ ,\ h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{(-1)}{\sqrt{1-(-x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
or $]-1,1[$ est un intervalle donc h est constante sur $]-1,1[$.
De plus, $h(0) = 2\arccos(0) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ donc $\forall x \in]-1,1[$, $h(x) = \pi$.
Par ailleurs, $h(-1) = \arccos(-1) + \arccos(1) = \pi + 0 = \pi$ et $h(1) = h(-1) = \pi$ (car h est évidemment paire !).
Remarque : sachant que h est constante et vaut π sur $]-1,1[$, on peut aussi déduire que h est constante et égale à π sur $[-1,1]$ de la continuité de h sur $[-1,1]$ (comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $[-1,1]$).
- **Méthode 2 : utilisation de la définition de la fonction** arccos**.**
Soit $x \in [-1,1]$ fixé quelconque.
Posons $\theta = \arccos(x)$.
On sait donc, par définition de la fonction arccos, que $\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = x \\ \theta \in [0,\pi] \end{array}\right.$
Par conséquent, $-x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$.
Or
$$x \in [0,\pi] \iff 0 \le x \le \pi \iff -\pi \le -x \le 0 \iff 0 \le \pi - x \le \pi$$
donc $\left\{\begin{array}{l} \cos(\pi-\theta) = -x \\ \pi - \theta \in [0,\pi] \end{array}\right.$ donc, par définition de arccos, $\arccos(-x) = \pi - \theta$.
En conclusion,
$$\arccos(x) + \arccos(-x) = \theta + \pi - \theta = \pi$$
- **Méthode 3 : prenons le sinus du membre de gauche.**
Soit $x \in [-1,1]$ fixé quelconque.
$$\sin(\arccos(x)+\arccos(-x)) = \underbrace{\sin\arccos(x)}_{\sqrt{1-x^2}}\underbrace{\cos\arccos(-x)}_{-x} + \underbrace{\cos\arccos(x)}_{x}\underbrace{\cos\arccos(-x)}_{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
donc $\arccos(x) + \arccos(-x) \in \pi\mathbb{Z}$.
— Si $x \in]-1,1[$, $\arccos x \in]0,\pi[$ et $\arccos x \in]0,\pi[$,
donc $\arccos(x) + \arccos(-x) \in]0,2\pi[$, or $\pi\mathbb{Z} \cap]0,2\pi[= \{\pi\}$
donc $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.
— Si $x = 1$ ou $x = -1$, l'égalité peut être obtenue par un calcul direct ou un argument de continuité de la fonction $x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$: $\arccos(1) + \arccos(-1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \underbrace{\arccos(x) + \arccos(-x)}_{=\pi} = \pi\ldots$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.}$$

(c) Exprimer, pour $x \in \mathcal{D}_g$, $g(-x)$ en fonction de $g(x)$. Que peut-on en déduire quant aux symétries de la courbe représentative de g ?

- ⋆ $\forall x \in \mathcal{D}_g$, $-x \in \mathcal{D}_g$ car $\mathcal{D}_g = [-1,1]$ est centré en 0,
- ⋆ $\forall x \in \mathcal{D}_g$,

$$\begin{array}{rcll} g(-x) & = & \arccos(f(-x)) & \\ & = & \arccos(-f(x)) & \text{car } f \text{ est impaire} \\ & = & \pi - \arccos(f(x)) & \text{en utilisant la relation de la question précédente pour } x \leftarrow f(x) \\ & = & \pi - g(x) & \end{array}$$

Ainsi, la courbe représentative de g admet le point de coordonnées $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie. Il suffit donc d'étudier g sur $[0,1]$ et de représenter son graphe G_+ sur $[0,1]$. Le graphe G_- de g sur $[-1,0]$ sera obtenu en prenant l'image de G_+ par la symétrie centrale de centre $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. La courbe représentative de g est $G_+ \cup G_-$.

---

2. (a) Expliciter, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta)$ en fonction de f et de $\cos\theta$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$\begin{array}{rcl} \cos(3\theta) & = & \cos(\theta + 2\theta) \\ & = & \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) \\ & = & \cos(\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - 2\sin(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ & = & 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\underbrace{\sin^2(\theta)}_{=1-\cos^2(\theta)}\cos(\theta) \\ & = & 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(3\theta) = f(\cos\theta).}$$

(b) En déduire les expressions explicites de $g(x)$ en fonction de x. On pourra introduire $\theta = \arccos(x)$.

Soit $x \in [0,1]$ fixé quelconque.
Posons $\theta = \arccos(x)$.
On sait donc, par définition de la fonction arccos, que $\cos\theta = x$ et que $x \in [0,1] \Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- ⋆ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $3\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ d'où

$$\begin{array}{rcll} g(x) & = & g(\cos\theta) & \\ & = & \arccos(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) & \text{par définition de } g \\ & = & g(f(\cos\theta)) & \text{par définition de } f \\ & = & \arccos(\cos(\underbrace{3\theta}_{\in\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]})) & \text{d'après le calcul effectué dans la question précédente} \\ & = & \arccos(\cos(\underbrace{-3\theta}_{\in\left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]})) & \text{car cos est paire} \\ & = & \arccos(\cos(\underbrace{2\pi - 3\theta}_{\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \subset [0,\pi]})) & \text{car cos est } 2\pi\text{-périodique} \\ & = & 2\pi - 3\theta & \text{car } \arccos \circ \cos_{|[0,\pi]} = \mathrm{id}_{[0,\pi]} \\ & = & 2\pi - 3\arccos x & \end{array}$$

- ⋆ si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc $3\theta \in [0,\pi]$ d'où

$$g(x) = g(f(\cos\theta)) = \arccos(\cos(\underbrace{3\theta}_{\in[0,\pi]})) = 3\theta = 3\arccos x$$

Utilisons la propriété établie dans la question 1(c) pour obtenir une expression de $g(x)$ lorsque $x \in [-1, 0]$:

- $\star$ si $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, alors $-x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc
$$g(x) = \pi - g(-x) = \pi - (2\pi - 3\arccos(-x)) = \pi - 2\pi + 3(\pi - \arccos x) = -3\arccos x + 2\pi$$
- $\star$ si $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, alors $-x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc
$$g(x) = \pi - g(-x) = \pi - (3\arccos(-x)) = \pi - 3(\pi - \arccos x) = 3\arccos x - 2\pi$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } g(x) = \begin{cases} 3\arccos x - 2\pi & \text{si } x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ -3\arccos x + 2\pi & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 3\arccos x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}}$$

(c) Tracer la courbe représentative de g sur $\mathcal{D}_g$.

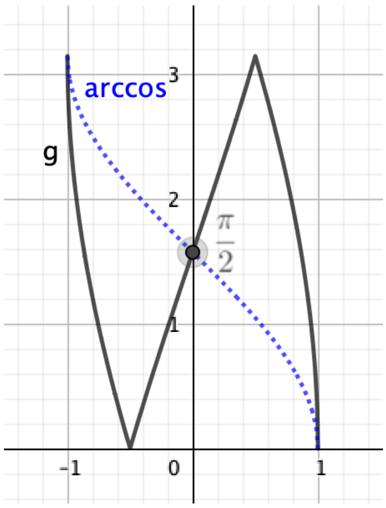

FIGURE 1 – Graphes de arccos (en pointillé) et de $g : x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$.

Les formules établies dans la question précédente montrent que

- $\star$ la courbe représentative de g sur $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ s'obtient à partir de celle de arccos sur le même intervalle en effectuant une affinité orthogonale d'axe $(O, \vec{i})$ et de rapport 3 suivie d'une translation de vecteur $-2\pi\vec{j}$,
- $\star$ la courbe représentative de g sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ s'obtient à partir de celle de arccos sur le même intervalle en effectuant une affinité orthogonale d'axe $(O, \vec{i})$ et de rapport -3 suivie d'une translation de vecteur $2\pi\vec{j}$,
- $\star$ la courbe représentative de g sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ s'obtient à partir de celle de arccos sur le même intervalle en effectuant une affinité orthogonale d'axe $(O, \vec{i})$.

(d) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(\theta)\mathrm{d}\theta$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} g(\theta)\mathrm{d}\theta$.

La fonction g vérifie pour tout $x \in [-1, 1]$, $g(x) + g(-x) = \pi$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{0}^{1} g(-u)\mathrm{d}u}_{u=-x} + \underbrace{\int_{0}^{1} g(u)\mathrm{d}u}_{u=x} \\ &= \int_{0}^{1} \big(g(-u) + g(u)\big)\mathrm{d}u = \int_{0}^{1} \pi\mathrm{d}u = \pi \times 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} g(\theta)\mathrm{d}\theta = \pi}$$

Par ailleurs, d'après le calcul sur g

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} g(\theta)\mathrm{d}\theta &= \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{1}{2}}^{1} g(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (2\pi - 3\arccos(\theta))\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 3\arccos(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \pi - 3\int_{0}^{\frac{1}{2}} \arccos(\theta)\mathrm{d}\theta + 3\int_{\frac{1}{2}}^{1} \arccos(\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

On fait une intégration par parties, en considérant $u : \theta \mapsto \arccos\theta$ et $v : \theta \mapsto \theta$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
Alors, pour $a, b \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \arccos(\theta)\mathrm{d}\theta &= \int_a^b u(\theta)v'(\theta)\mathrm{d}\theta = \big[u(\theta)v(\theta)\big]_a^b - \int_a^b \frac{-\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{d}\theta \\ &= b\arccos b - a\arccos a - \int_a^b \frac{-2\theta}{2\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{d}\theta = b\arccos b - a\arccos a - \left[\sqrt{1-\theta^2}\right]_a^b\end{aligned}$$

Reprenons le calcul précédent avec $a \leftarrow 0$ et $b \leftarrow \frac{1}{2}$ une première fois et $a \leftarrow \frac{1}{2}$ et $b \leftarrow 1$, une seconde fois.

$$\int_0^1 g(\theta)\mathrm{d}\theta = \pi - 3\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - 0 - \sqrt{1-\frac{1}{4}} + \sqrt{1-0}\right) + 3\left(1\times 0 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - \sqrt{1-1} + \sqrt{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$\boxed{\int_0^1 g(\theta)\mathrm{d}\theta = 3\sqrt{3} - 3}$$

---

3. (a) Déterminer le domaine sur lequel s'applique le théorème de dérivabilité d'une composée de fonctions dérivables.

Brouillon.
Où sont les problèmes ? arccos est définie sur $[-1, 1]$ mais dérivable sur $]-1, 1[$ seulement donc il faut enlever les $x \in \mathcal{D}_g$ tels que $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$.
Or la lecture du graphe de f montre que

$$f(x) = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

et

$$f(x) = -1 \iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Rédaction propre.
⋆ f est dérivable sur $]-1, 1[\setminus\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ et $f\left(]-1, 1[\setminus\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}\right) \subset]-1, 1[$
⋆ arccos est dérivable sur $]-1, 1[$
donc le théorème de dérivabilité d'une composée de fonctions dérivables permet de conclure que $g = \arccos\circ f$ est dérivable sur $]-1, 1[\setminus\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Ainsi, le théorème de dérivabilité d'une composée de fonctions dérivables permet de montrer que g est dérivable sur $]-1, 1[\setminus\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

(b) Calculer la dérivée de g sur ce domaine.

Calcul annexe :

$$(4X-1)^2(X-1) = (16X^2 - 8X + 1)(X-1) = 16X^3 - 24X^2 + 9X - 1$$

Soit $x \in]-1, 1[\setminus\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{12x^2-3}{\sqrt{1-(4x^3-3x)^2}} \\ &= -3\frac{4x^2-1}{\sqrt{1-16x^6+24x^4-9x^2}} \\ &= -3\frac{4x^2-1}{\sqrt{-(4x^2-1)^2(x^2-1)}} \quad \text{en utilisant le calcul annexe pour } X \leftarrow x^2 \\ &= -3\frac{(4x^2-1)}{|4x^2-1|}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

$t \mapsto 4t^2 - 1$ est un trinôme du second degré dont les racines (évidentes !) sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, or son coeffiecient dominant est strictement positif donc,

$$4t^2 - 1 > 0 \iff t \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad \text{et} \quad 4t^2 - 1 < 0 \iff t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

Sachant que “notre” $x \in]-1, 1[\setminus\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$,

— Si $x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$ donc

$$g'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

— Si $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $|4x^2 - 1| = -(4x^2 - 1)$ donc

$$g'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } g'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \\ \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \end{cases}}$$

(c) Retrouver les résultats précédents.

D'après le calcul de g' effectué dans la question précédente,

$$\begin{cases} (g - 3\arccos)'(x) &= 0 \quad \text{si } x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[, \\ (g + 3\arccos)'(x) &= 0 \quad \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \\ (g - 3\arccos)'(x) &= 0 \quad \text{si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \end{cases}$$

Or une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle.
Ainsi, $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : g(x) = \begin{cases} 3\arccos x + a & \text{si } x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[, \\ -3\arccos x + b & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \\ 3\arccos x + c & \text{si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \end{cases}$
Un calcul direct donne d'une part $g(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ et d'autre part en utilisant la formule ci-dessus pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $g(0) = -3\arccos 0 + b = -\frac{3\pi}{2} + b$.
On en déduit que $b = 2\pi$.
g est une fonction continue sur $[-1,1]$ comme composée de $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],[-1,1])$ et $\arccos \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ donc $g(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 3\arccos(1) + c = c$. Par ailleurs, un calcul direct donne $g(1) = \arccos(f(1)) = \arccos(1) = 0$.
On en déduit que $c = 0$.
Enfin, par continuité de g en -1, $g(-1) = \lim_{x\to -1^+} g(x) = 3\arccos(-1) + c = 3\pi + a$. Par ailleurs, un calcul direct donne $g(-1) = \arccos(f(-1)) = \arccos(-1) = \pi$.
On en déduit que $a = -2\pi$.
Remarque 1 : autre moyen de déterminer a connaissant c. En reprenant la propriété prouvée dans la question 1(c), $g(x) + g(-x) = \pi$ on obtenait, pour $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ (donc $-x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$),

$$(3\arccos(x) + c) + (3\arccos(-x) + a) = \pi$$

or nous avons aussi prouvé dans la question 1(c) que $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$ ce qui permet de conclure que

$$a + c = -2\pi$$

Remarque 2. Par continuité de g sur $[-1,1]$ donc en particulier en -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et 1, les formules obtenues sur les intervalles à droite ou à gauche de ces points sont encore valables en ces points.

$$\boxed{\text{Ainsi, } g(x) = \begin{cases} 3\arccos x - 2\pi & \text{si } x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ -3\arccos x + 2\pi & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \\ 3\arccos x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}}$$