Devoir à la maison n°4

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice

Dans tout le problème, l'énoncé des lettres d'un triangle se fera toujours dans le sens direct.
On considère une triangle (quelconque) ABC. Soient D, E et F tels que les triangles BAD, CBE et ACF sont équilatéraux (et nécessairement à l'extérieur de ABC).
On note G, H et I les centres (de gravité, par exemple) respectifs de ces trois triangles équilatéraux.
On veut montrer que GHI est lui-même un triangle équilatéral.
Pour tout le problème, on notera : $j = e^{2i\pi/3}$ et en minuscule m l'affixe du point M.

1. Faire une figure.
2. Montrer qu'un triangle XYZ est équilatéral si et seulement si $e^{i\pi/3}(x-z) = (y-z)$.
3. En déduire que $(a-g) = j(b-g)$, $(b-h) = j(c-h)$ et $(c-i) = j(a-i)$.
4. Donner alors une relation entre g, h et i, en déduire la nature du triangle GHI.
5. Montrer que les centres de gravité des triangles ABC et GHI coïncident.
   On admet que l'affixe du centre de gravité d'un triangle XYZ et $\frac{1}{3}(x+y+z)$.
6. A qui est attribué ce théorème ?

Problème - Modèle de Verhulst

On considère une population d'individus.
On note $N(t)$ le nombre d'individus dans la population à l'instant t ($t \in [0;+\infty[$).
On note $N_0 = N(0)$ la taille de la population à l'instant initial $t = 0$. On suppose $N_0 > 0$.
Dans le modèle de Verhulst la fonction N est dérivable sur $[0;+\infty[$ et est solution de l'équation différentielle *non linéaire*

$$y' = ry(1 - \frac{1}{K}y) \qquad (E)$$

où $r > 0$ et $K > 0$ sont deux paramètres dont on donnera un sens « physique » par la suite.

1. Une première fonction intermédiaire.
   On suppose que N est une solution de (E). On lui associe $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto N(t)e^{-rt}$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' = -\frac{r}{K}N(t)y$.
   (c) En déduire qu'il existe une fonction g définie sur $[0;+\infty[$ et un réel $C > 0$ tels que :
   $$\forall\ t \geqslant 0, \qquad f(t) = Ce^{g(t)}$$
   on exprimera g et C en fonction (d'une primitive) de N et des paramètres N_0, r et K.
2. Une seconde fonction intermédiaire. Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$.
   (a) Justifier que la fonction h est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que h est solution de l'équation différentielle linéaire (E_2) : $y' = -ry + \frac{r}{K}$.
   (c) Résoudre l'équation différentielle (E_2).
   (d) En déduire que la fonction N est définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par
   $$N(t) = \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)}$$

Dans la suite, on admet que la fonction N est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $N(t) = \dfrac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)}$.
On rappelle que $N_0 > 0$.

3. Etude de la fonction N.
   (a) Déterminer $\lim_{t\to+\infty} N(t)$.
   En déduire la raison pour laquelle Verhulst appelle la constante K : ≪ capacité du milieu ≫.
   (b) Étudier les variations (strictes) de N sur $[0;+\infty[$.
   On distinguera plusieurs cas en fonction des paramètres du problème
4. On suppose que $N_0 < \frac{1}{2}K$.
   (a) Montrer que N est de classe $\mathcal{C}^2$ et que pour tout $t \geqslant 0$
   $$N''(t) = r^2 N(t) \times \left(1 - \frac{1}{K}N\right)\left(1 - \frac{2}{K}N\right)$$
   (b) En déduire qu'il existe un unique réel t_0 dans l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $N''(t_0) = 0$.
   (c) On dit qu'une fonction φ, de classe $\mathcal{C}^2$ est
   convexe sur un intervalle J, si pour tout $t \in J$, $\varphi''(t) > 0$.
   concave sur un intervalle J si pour tout $t \in J$, $\varphi''(t) < 0$.
   Etudier la convexité/concavité de N sur (les intervalles de) $\mathbb{R}$.
   (d) Verhulst considérait que ≪ *la date à laquelle la croissance de la population commence à ralentir correspond au moment où la taille de la population atteint la moitié de sa valeur limite.* ≫
   En considérant t_0 et $N(t_0)$, justifier l'affirmation de Verhulst.
   (e) Tracer la courbe représentant N en fonction de t, pour $t \geqslant 0$. On prendra $K = 4 \times N_0$ et $t_0 = 3$cm. On veut voir sur la courbe :
   — la tangente en $t = 0$.
   — la tangente en $t = t_0$.
   — l'asymptote pour $t \to +\infty$
5. On suppose toujours que $0 < N_0 < \frac{K}{2}$.
   Verhulst appelait *deuxième âge [de la croissance de la population]* la période se situant entre les instants 0 et t_0, et *troisième âge* la période se situant entre les instants t_0 et $2t_0$.
   (a) Montrer que $\exp(rt_0) = \dfrac{K}{N_0} - 1$.
   (b) Donner une primitive de N sur $[0,+\infty[$.
   (c) On appelle valeur moyenne d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a;b]$, le nombre
   $$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$$
   Montrer que la valeur moyenne de N sur la période s'étendant sur les *deuxième* et *troisième* âges selon Verhulst (i.e. entre $t = 0$ et $t = 2t_0$) est égale à $\dfrac{K}{2}$.
   (d) On note $N_1 = N(t_0)$. Montrer que $r = \dfrac{1}{t_0} \ln \dfrac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{N_1} - \frac{1}{K}}$.