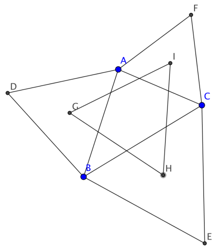
MPSI 3 - Fermat 10.11.21
2021-2022

Devoir à la maison n°4
CORRECTION

Exercice

1.



2. Soient X, Y et Z trois points du plan.
XYZ est équilatéral $\iff r(X) = Y$, où r est la rotation de centre Z et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
$\iff y - z = e^{\imath\pi/3}(x - z)$.

3. Le triangle ADB est équilatéral,
donc $d - b = e^{\imath\pi/3}(a - b)$, mais aussi $a - d = e^{\imath\pi/3}(b - d)$.
G est le centre de ce triangle, donc $3g = a + b + d$,
On a donc $3(a-g) = 3a - 3g = (a-a)+(a-b)+(a-d) = (a-b)+(a-d) = (a-b)+e^{\imath\pi/3}(b-d)$.
Alors que $3j(b - g) = j(3b - 3g) = j(b - a + b - d) = j(b - a) + j(b - d)$.
Donc :
$$3[(a - g) - j(b - g)] = [1 + j](a - b) - [e^{\imath\pi/3} - j](d - b)$$
Par ailleurs $j + 1 = e^{\imath\pi/3}$, donc
$$3[(a - g) - j(b - g)] = e^{\imath\pi/3}(a - b) - (d - b) = 0$$
d'après la première équation.
On a donc $(a - g) - j(b - g) = 0$.
Et on retrouve les mêmes résultats en permutant (dans l'ordre) $[A, B, D, G] \to [B, C, E, H]$ et $[A, B, D, G] \to [C, A, F, I]$. Donc :
$$\boxed{j(b - g) = (a - g) \qquad j(c - h) = (b - h) \qquad j(a - i) = (c - i)}$$
Ce n'est pas très malin, le nombre i qui apparait ici est l'affixe de I. A ne pas confondre avec $\imath$ tel que $\imath^2 = -1\ldots$

4. $(1 - j)g = a - jb$, $(1 - j)h = b - jc$ et $(1 - j)i = c - ja$.
$$j^2(1-j)g = j^2(a-jb) = j^2a-b = j^2a-(1-j)h-jc = -(1-j)h-j(c-ja) = -(1-j)h-j(1-j)i$$
En divisant par $1 - j$, on obtient :
$$\boxed{j^2g + ji + h = 0}$$
Comme $1 + j + j^2 = 0$, on a donc $j^2 = -1 - j$ et donc
$$j(i - g) + (h - g) = 0 \Rightarrow (h - g) = (-j)(i - g) = e^{-\imath\pi/3}(i - g)$$
Donc
$$\boxed{\text{le triangle } GIH \text{ est équilatéral (indirect)}}$$

5. Le centre de gravité de GHI a pour affixe
$$g + h + i = \frac{1}{1 - j}(a - jb + b - jc + c - ja) = a + b + c$$
Donc
$$\boxed{\text{les centres de gravité des triangles } ABC \text{ et } GHI \text{ coïncident}}$$

6.
$$\boxed{\text{Ce théorème est classiquement attribué à Napoléon Bonaparte}}$$

Problème - Modèle de Verhulst

1. (a) N est dérivable par hypothèse (solution d'une EDL1). $t \mapsto e^{-rt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc dérivable. Par multiplication,

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } [0;+\infty[.}$$

   (b) On a alors, pour tout $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = N'(t)e^{-rt} - rN(t)e^{-rt} = rN(t)\times(1-\frac{1}{K}N(t))\times e^{-rt} - rN(t)\times e^{-rt} = -\frac{r}{K}N(t)\times N(t)e^{-rt}$$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1) : y' = -\frac{r}{K}N(t)y.}$$

   (c) Notons $\hat{N}$, une primitive de N sur $\mathbb{R}$ (N est continue sur $\mathbb{R}$).
f est solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, nécessairement :

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \qquad f : t \mapsto K\exp\left(-\int_{.}^{t} -\frac{r}{K}N(u)\mathrm{d}u\right) = K\exp\left(-\frac{r}{K}\hat{N}(t)\right)$$

Par ailleurs, $f(0) = N(0)e^0 = N_0 = K\exp\left(-\frac{r}{K}\hat{N}(0)\right)$, donc $K = N_0\exp\left(\frac{r}{K}\hat{N}(0)\right)$ Donc

$$\boxed{\forall\, t \geqslant 0 \qquad f(t) = N_0 e^{-\frac{r}{K}(\hat{N}(t)-\hat{N}(0)}}$$

2. Une seconde fonction intermédiaire. Soit $h : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$.

   (a) D'après la partie précédente, pour tout $t \geqslant 0$, $N(t) = f(t)e^{rt} = N_0 e^{rt-\frac{r}{K}(\hat{N}(t)-\hat{N}(0)} > 0$.
Donc h est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, elle est dérivable comme inverse d'une fonction dérivable jamais nulle.

$$\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } [0;+\infty[.}$$

   (b) On a alors, pour tout $t \geqslant 0$, $h'(t) = -\dfrac{N'(t)}{N(t)} = r\left(1-\dfrac{1}{K}N\right) = r - \dfrac{r}{K}h(t)$

$$\boxed{h \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } (E_2) : y' = -ry + \frac{r}{K}\ (E_2).}$$

   (c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On résout : $y' = -ry$.
On a alors une solution $y_0 : t \mapsto e^{-rt}$ car r est constant.
Concernant une solution particulière, on peut appliquer une méthode de type variation de la constante, ou trouver une solution particulière, par exemple constante $y : t \mapsto \dfrac{1}{K}$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-rt} + \tfrac{1}{K}; C \in \mathbb{R}\}}$$

   (d) h est une solution donc $h \in \mathcal{S}$, et il existe C tel que $h : t \mapsto Ce^{-rt} + \frac{1}{K}$. Or

$$h(0) = \frac{1}{N(0)} = \frac{1}{N_0} = Ce^0 + \frac{1}{K} \Rightarrow C = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}$$

Donc, pour tout $t \geqslant 0$,

$$h(t) = \frac{1}{N_0}e^{-rt} + \frac{1}{K}(1-e^{-rt}) \Longrightarrow N(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{1}{N_0}e^{-rt} + \frac{1}{K}(1-e^{-rt})} \times \frac{N_0e^{rt}}{N_0e^{rt}} = \frac{N_0e^{rt}}{1+\frac{N_0}{K}(e^{rt}-1)}$$

$$\boxed{N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{N_0e^{rt}}{1+\frac{N_0}{K}(e^{rt}-1)}}$$

Remarques !
L'existence de N est donnée dans l'énoncé. Il faudrait à ce stade vérifier que la fonction obtenue (la seule possible) est bien solution de l'équation (E). Il faudrait tout simplement faire le calcul et vérifier l'égalité.

3. Etude de la fonction N.

(a) Pour tout $t \geqslant 0$, en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-rt} > 0$:

$$N(t) = \frac{N_0}{e^{-rt}(1 - \frac{N_0}{K}) + \frac{N_0}{K}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{N_0}{\frac{N_0}{K}} = K$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} N(t) = K}$$

Comme K est la limite de N, quelle que soit la condition initiale ($N_0 > K$ ou $N_0 < K$), il s'agit de la capacité d'accueil du nombre de personnes N dans le milieu considéré.

$$\boxed{\text{VERHULST appelle la constante } K : \text{« capacité du milieu ».}}$$

(b) $t \mapsto e^{-rt}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$) valeur dans $]0, 1]$.

— Si $\frac{N_0}{K} > 1$, alors $t \mapsto e^{-rt}(1- \frac{N_0}{K}$ est strictement croissante (multiplication par un nombre négatif).
L'ajout d'une constante, ne change rien.
La composition par $t \mapsto \frac{1}{t}$ rend la fonction strictement décroissante.
Dans ce cas : N est décroissante.

— Si $\frac{N_0}{K} < 1$, alors $t \mapsto e^{-rt}(1 - \frac{N_0}{K}$ est strictement décroissante (multiplication par un nombre positif).
L'ajout d'une constante, ne change rien.
La composition par $t \mapsto \frac{1}{t}$ rend la fonction strictement croissante.
Dans ce cas : N est croissante.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \frac{N_0}{K} < 1,\ N \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \text{si } \frac{N_0}{K} > 1,\ N \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \text{et si } \frac{N_0}{K} = 1,\ N \text{ est constante égale à } K\end{array}}$$

Remarques !

On peut également exploiter la dérivée, surtout qu'ici on a directement $N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$.
On voit le changement de signe de N' *dès que* $N > K$ *ou* $N < K$, *car* $N > 0$

4. On suppose que $N_0 < \frac{1}{2}K$ (et donc $\frac{N_0}{K} < 1$).

(a) Comme N est dérivable et que $N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, alors N' est également dérivable.
Donc N' est continue, donc N est de classe $\mathcal{C}^1$.
Ainsi N' est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc

$$\boxed{N \text{ est de classe } \mathcal{C}^2.}$$

Et pour tout $t \geqslant 0$, (en dérivant l'équation différentielle) :

$$\begin{aligned} N''(t) &= rN'(t) - \frac{r}{K}2N(t)N'(t) \\ &= r^2N(t)\left(1 - \frac{N}{K}\right) - 2\frac{r^2}{K}N^2(t)\left(1 - \frac{N}{K}\right) \\ &= r^2N(t)\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - 2\frac{N}{K}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, t \geqslant 0, \qquad N''(t) = r^2N(t) \times \left(1 - \frac{1}{K}N\right)\left(1 - \frac{2}{K}N\right)}$$

(b) Puisque $K > \frac{K}{2} > N_0$, nous savons que N est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[N_0, K[$,
Donc N réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[N_0, K[$.
Puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$N(t) > 0\,;\ 1 - \frac{N}{K} > 0\,;\ 1 - \frac{2N}{K} = 0 \Leftrightarrow N = \frac{K}{2}$$

Donc on a l'équivalence : $\quad N''(t) = 0 \Longleftrightarrow N(t_0) = \dfrac{K}{2}$.
Or N réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[N_0, K]$ et par hypothèse $N_0 < \frac{K}{2}$, donc $\frac{K}{2} \in [N_0, K[$.

$$\boxed{\text{Donc il existe un unique réel } t_0 \text{ dans l'intervalle }]0; +\infty[\text{ tel que } N''(t_0) = 0 \text{ (et } N(t_0) = \tfrac{K}{2}).}$$

(c) On a alors, $N''(t) > 0 \iff 1 - \dfrac{2N(t)}{K} > 0 \iff N(t) < \dfrac{K}{2} = N(t_0) \iff t < t_0$ car N est strictement croissante.
Et de même $N''(t) < 0 \iff t > t_0$.

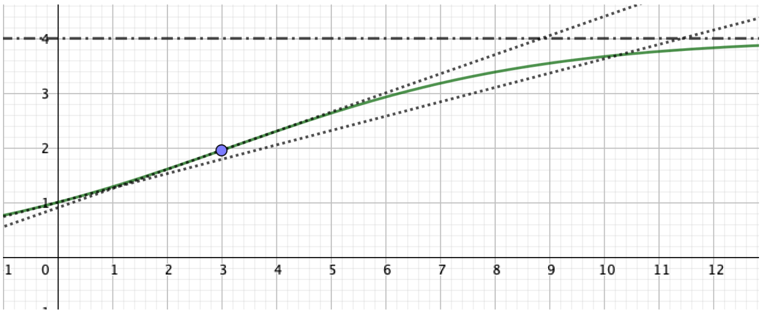
$$\boxed{\text{Donc } N \text{ est convexe sur } [0, t_0[\text{ et concave sur }]t_0, +\infty[.}$$

(d) La croissance ralentit signifie que la dérivée, toujours positive (croissance) décroit, donc que sa propre dérivée (soit la dérivée seconde de la fonction initiale) est négative.

$$\boxed{\text{Donc la croissance ralentit signifie que } N'' = 0\text{. C'est bien en } t_0 \text{ que cela se produit.}}$$

On parle mathématiquement de point d'inflexion, on dit que la courbe « tourne sa concavité » : elle passe de convexe à concave ou inversement.

(e) On a la représentation graphique suivante :



On notera la forme convexe avant le point et concave ensuite.

5. (a) On sait que $N(t) = \dfrac{N_0}{e^{-rt}(1 - \frac{N_0}{K}) + \frac{N_0}{K}}$. Or en t_0, $N(t_0) = \dfrac{K}{2}$, cela donne l'équation :

$$\frac{N_0}{e^{-rt_0}(1 - \frac{N_0}{K}) + \frac{N_0}{K}} = \frac{K}{2} \iff \frac{1}{e^{-rt_0}(\frac{K}{N_0} - 1) + 1} = \frac{1}{2} \iff e^{-rt_0}(\frac{K}{N_0} - 1) = 1$$

$$\boxed{\exp(rt_0) = \frac{K}{N_0} - 1}$$

(b) On a vu

$$N : t \mapsto \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)} = \frac{K}{r}\frac{r\frac{N_0}{K}e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)} = \frac{K}{r}\frac{u'(t)}{u(t)}$$

avec $u : t \mapsto 1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)$.
Donc une primitive de N est $\hat{N} : t \mapsto \frac{K}{r}\ln\left|1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)\right|$.
On a vu que $N > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc comme son numérateur l'est également, son dénominateur est positif.

$$\boxed{\text{Une primitive de } N \text{ sur } [0, +\infty[\text{ est } \hat{N} : t \mapsto \tfrac{K}{r}\ln\left(1 + \tfrac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)\right).}$$

(c) On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2t_0} N(t)\mathrm{d}t &= \hat{N}(2t_0) - \hat{N}(0) = \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{N_0}{K}(e^{2rt_0} - 1)\right) - 0 = \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{N_0}{K}\left((e^{rt_0})^2 - 1\right)\right) \\
&= \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{N_0}{K}\left(\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)^2 - 1\right)\right) = \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{N_0}{K}\left(\frac{K^2}{N_0^2} - 2\frac{K}{N_0}\right)\right) \\
&= \frac{K}{r}\ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) = \frac{K}{r}\ln(e^{rt_0}) = Kt_0
\end{aligned}$$

Pour avoir la valeur moyenne, on divise par $2t_0$, et donc

$$\boxed{\text{la valeur moyenne de } N \text{ entre } t = 0 \text{ et } t = 2t_0 \text{ vaut } \frac{K}{2}.}$$

(d) On a vu que $N_1 = N(t_0) = \dfrac{K}{2}$. Donc $\dfrac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{N_1} - \frac{1}{K}} = \dfrac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{2}{K} - \frac{1}{K}} = \dfrac{K}{N_0} - 1 = e^{rt_0}$.

Donc en composant par ln et en divisant par t_0 :

$$\boxed{r = \frac{1}{t_0}\ln\frac{\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{N_1} - \frac{1}{K}}}$$