Devoir à la maison n°5

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

Exercice 1

On considère $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 15 & 36 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -16 & -1 \end{pmatrix}$ et on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation suivante $M \times X = \lambda X$ admet-elle d'autres solutions que la solution nulle $(X = 0_4)$?

Pour chacune de ces valeurs λ, on donnera l'ensemble des solutions E_λ.

Exercice 2

Soit $(G, *)$ un groupe non réduit à un seul élément et dont tous élément différent du neutre (noté e) est d'ordre 2 (c'est-à-dire que $\forall\ g \in G,\ g * g = e$).

1. Montrer que G est abélien.
   On pourra considérer $(g_1 * g_2)^2$.
2. Montrer que G possède au moins un sous-groupe de cardinal 2
3. (a) Soit H un sous-groupe fini strict de G ($H \neq G$) et soit $g \in G \backslash H$. Posons $gH = \{g*h \mid h \in H\}$. Montrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de G de cardinal $2 \times \text{card}(H)$.
   (b) En déduire que, si G est un groupe fini, alors son cardinal est une puissance de 2.

Exercice 3

On rappelle que si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, quel que soit $x \in I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset I$.

Soit I un intervalle ouvert. On veut démontrer qu'il n'existe pas de sous-ensembles ouverts non vides A et B de $\mathbb{R}$ tel que $I = A \oplus B$ (i.e. $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = I$). Pour cela on va supposer que de tels ensembles A et B existent pur aboutir à une contradiction.

On considère pour $a \in A$ et $b \in B$ et $E = \{t \in [0, 1] \mid a + t(b - a) \in A\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure, que l'on appellera T.
2. Montrer en utilisant le fait que A est ouvert que $a + T(b - a) \notin A$.
3. En déduire que $a + T(b - a) \in B$
4. Montrer que cela contredit le fait que T soit la borne supérieure de E.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de démontrer le lemme des pics (ou du soleil levant) :

Soit (u_n) une suite numérique, bornée.
Alors (u_n) admet une suite extraite croissante ou une suite extraite décroissante

1. Donner une suite numérique qui admet (au moins) une suite extraite croissante et (au moins) une suite extraite décroissante et qui ne converge pas.
2. On considère une suite (u_n) bornée.
   On note $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\ m \geqslant n, u_n \leqslant u_m\}$
   (a) On suppose que P est infini. Montrer qu'on peut extraire de (u_n) une suite croissante.
   (b) On suppose que P est fini. Montrer qu'on peut extraire de (u_n) une suite décroissante.
   (c) Conclure
3. Quelles hypothèses sur $\mathbb{R}$ ont été nécessaires pour démontrer le lemme de pics ?
   Peut-on l'appliquer pour des suites définies sur d'autres ensembles : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Et sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, des parties de E pour la relation d'inclusion ?
4. Application. Donner une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.