Devoir à la maison n°5
CORRECTION

Exercice 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$MX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 6(1-\lambda)x & + & 15y & + & 36z & + & 9t & =0\\ & & 3(1-2\lambda)y & & & - & 9t & =0\\ & - & y & - & 2(1+3\lambda)z & + & t & =0\\ & - & 5y & - & 16z & - & (1+6\lambda)t & =0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 6(1-\lambda)x & + & 15y & + & 36z & + & 9t & =0\\ & - & y & - & 2(1+3\lambda)z & + & t & =0\\ & & & - & 6(1+3\lambda)(1-2\lambda)z & - & 6(1+\lambda)t & =0\\ & & & & 6(-1+5\lambda)z & - & 6(1+\lambda)t & =0 \end{array}\right. \begin{array}{|r} \\ L_2\leftarrow L_3\\ L_3\leftarrow L_2+(3(1-2\lambda))L_3\\ L_4\leftarrow L_4-5L_3 \end{array}$$

Divisons par 6 les deux dernières lignes et enlevons un λ devant t afin d'avoir un nouveau pivot sans λ

$$MX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 6(1-\lambda)x & + & 15y & + & 36z & + & 9t & =0\\ & - & y & - & 2(1+3\lambda)z & + & t & =0\\ & & & & (1+\lambda-6\lambda^2)z & + & (1+\lambda)t & =0\\ & & & & (\lambda-\lambda^2)z & & & =0 \end{array}\right. \begin{array}{|r} \\ \\ L_3\leftarrow -\frac{1}{6}L_3\\ L_4\leftarrow \frac{1}{36}(L_4-L_3) \end{array}$$

1. Si $\lambda-\lambda^2\neq 0$, i.e. $\lambda\notin\{0,1\}$.
   Alors on a (en simplifiant par $\lambda-\lambda^2$) :

$$MX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 6(1-\lambda)x & + & 15y & + & 9t & =0\\ & - & y & + & t & =0\\ & & & & (1+\lambda)t & =0\\ & & & & z & =0 \end{array}\right.$$

   (a) Si en outre $1+\lambda\neq 0$ i.e. $\lambda\neq -1$
   Alors on a (en simplifiant par $\lambda-\lambda^2$)

$$MX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rl} 6(1-\lambda)x & =0\\ y & =0\\ t & =0\\ z & =0 \end{array}\right. \iff x=y=z=t=0$$

   car on a également $\lambda\neq 1$.

   (b) Si $\lambda=-1$, Alors on a (en simplifiant par $\lambda-\lambda^2$)

$$MX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 12x & + & 15y & + & 9t & =0\\ & - & y & + & t & =0\\ & & & & z & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x & =-2t\\ y & =t\\ z & =0 \end{array}\right.$$

2. Si $\lambda=0$, on a

$$MX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 6x & + & 15y & + & 36z & + & 9t & =0\\ & - & y & - & 2z & + & t & =0\\ & & & & z & + & t & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x & =-3t\\ y & =3t\\ z & =-t \end{array}\right.$$

3. Si $\lambda=1$, on a

$$MX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 15y & + & 36z & + & 9t & =0\\ -y & - & 8z & + & t & =0\\ & - & 4z & + & 2t & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} -y & - & 8z & + & t & =0\\ & - & 54z & + & 24t & =0\\ & - & 2z & + & t & =0 \end{array}\right. \begin{array}{|c} L_1\leftarrow L_2\\ L_2\leftarrow L_1+15L_2\\ L_3\leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array} \iff \left\{\begin{array}{rl} y & =0\\ t & =0\\ z & =0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\}, M\times X=\lambda X \text{ n'admet que la solution nulle.}\\ \text{Si } \lambda=1, \mathcal{S}_1=\{x(1,0,0,0), x\in\mathbb{R}\}, \text{ si } \lambda=0, \mathcal{S}_0=\{t(-3,3,-1,1), t\in\mathbb{R}\} \text{ et si } \lambda=-1, \mathcal{S}_{-1}=\{t(-2,1,0,1), t\in\mathbb{R}\} \end{array}}$$

Exercice 2

Soit $(G,*)$ un groupe non réduit à un seul élément et dont tous élément différent du neutre (noté e) est d'ordre 2 (c'est-à-dire que $\forall\ g \in G,\ g*g=e$).

1. Soient $g_1, g_2 \in G$ deux éléments distincts.
   Alors $g_1 * g_2 \in G$, donc $e = (g_1 * g_2) * (g_1 * g_2) = g_1g_2g_1g_2$.
   On peut multiplier à gauche par g_1 : $g_1 = g_1g_1g_2g_1g_2 = g_2g_1g_2$, car $g_1g_1 = e$.
   Puis on multiplier à droite par g_2 :
   $$g_1g_2 = g_2g_1g_2g_2 = g_2g_1$$
   $$\boxed{G \text{ est abélien.}}$$

2. G possède au moins un autre élément que e. Notons cet élément g.
   Soit $F = \{e, g\}$.
   Alors $e * g = g * e = g \in F$ et $g^{-1} = g \in F$, $e^{-1} = e \in F$.
   Par conséquent F est bien un sous-groupe de G.
   $$\boxed{G \text{ possède au moins un sous-groupe de cardinal 2.}}$$

3. (a) Soit H un sous-groupe fini strict de G ($H \neq G$) et soit $g \in G\backslash H$. Posons $gH = \{g*h \mid h \in H\}$.
   Montrons que $F = H \cup gH$ est bien un sous-groupe de G, avec la seconde caractérisation.
   Mais avant notons que si $f \in F$, alors
   ou bien f est un élément de H
   ou bien $f = gh$ et donc $gf = g^2h = h$ est un élément de H.
   — $e \in H$, car H est un groupe donc $e \in F$ et F et non vide.
   — Soit $f_1, f_2 \in F$, alors ou bien $f_i = h_i \in H$ et $f_i^{-1} = h_i^{-1} \in H$ ou bien $gf_i = h_i \in H$ et donc $f_i^{-1} = (gh_i)^{-1} = h_i^{-1}g$.
   Nous allons faire tous les cas possibles de multiplication f_1 par f_2^{-1}dans un tableau (en exploitant le fait que G est abélien) :

$f_1\backslash f_2^{-1}$	h_2^{-1}	$h_2^{-1}g$
h_1	$h_1h_2^{-1} \in H \subset F$	$h_1h_2^{-1}g = gh_1h_2^{-1} \in gH \subset F$
gh_1	$gh_1h_2^{-1} \in gH \subset G$	$gh_1h_2^{-1}g = h_1h_2^{-1} \in H \subset F$

   Par seconde caractéristique, on peut affirmer que $F < G$.
   Enfin, notons que si $f \in H \cap gH$, alors $f = h_1 = gh_2$, et donc $g = h_1h_2^{-1} \in H$.
   Ceci est absurde donc $H \cap gH = \emptyset$.
   Ainsi $\text{card}(F) = \text{card}(H) + \text{card}(gH) = 2\text{card H}$.
   $\varphi : h \mapsto gh$ est une bijection ($\varphi^{-1} = \varphi$) de H sur gH donc $\text{card}(gH) = \text{card}(H)$.
   $$\boxed{F = H \cup gH \text{ est un sous-groupe de } G \text{ de cardinal : } 2 \times \text{card}(H).}$$

   (b) Supposons que G est un groupe fini. Notons N son cardinal.
   Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ et $2^p \leqslant N$ (i.e. $p = \lfloor \frac{\ln N}{\ln 2} \rfloor$:
   $$\mathcal{P}_p : \ll\ G \text{ possède un sous-groupe de cardinal } 2^p\ \gg$$
   — Il possède au moins un sous-groupe de cardinal 2 d'après la question 2.

   — Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{p+1} \leqslant N$. Supposons que $\mathcal{P}_p$ est vraie.
   Notons H le sous-groupe de G de cardinal $2^p < N$.
   Donc, il existe $g \in G \setminus H$ et $H \cup gH$ est un sous-groupe de G de cardinal $2 \times 2^p = 2^{p+1}$.
   Ainsi $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

   Par conséquent, G possède un sous-groupe de cardinal 2^p pour tout $p \leqslant \dfrac{\ln N}{\ln 2}$.
   On a alors $2^p \leqslant N < 2^{p+1}$. Donc $n \in [\![2^p, 2^{p+1} - 1]\!]$.
   Or le cardinal de tout sous-groupe de G divise celui de G, donc $2^p | N$.
   Le seul nombre de cet intervalle divisible par 2^p est 2^p.
   $$\boxed{N = 2^p}$$

Exercice 3

On rappelle que si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, quel que soit $x \in I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset I$.

Soit I un intervalle ouvert. On veut démontrer qu'il n'existe pas de sous-ensembles ouverts non vides A et B de $\mathbb{R}$ tel que $I = A \oplus B$ (i.e. $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = I$). Pour cela on va supposer que de tels ensembles A et B existent pur aboutir à une contradiction.

On considère pour $a \in A$ et $b \in B$ et $E = \{t \in [0,1] \mid a + t(b-a) \in A\}$.

1. • L'ensemble E est une partie de $\mathbb{R}$.
   • Il est inclus dans $[0,1]$, donc est majoré par 1.
   • $0 \in E$, car $a + 0(b-a) = a$ et que $a \in A$.
   Or toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure,

   $$\boxed{\text{donc } E \text{ admet une borne supérieure, que l'on appellera } T.}$$

2. Si $T \in A$, alors comme A est ouvert, il existe $\epsilon_T > 0$ tel que $]T-\epsilon_T, T+\epsilon_T[\subset A$.
   — Si $b - a \geqslant 0$.
   En particulier $T + \dfrac{\epsilon_T}{2} = a + \left(T + \dfrac{\epsilon_T}{2(b-a)}\right)(b-a) \in A$
   alors que $T \leqslant T + \dfrac{\epsilon_T}{2(b-a)}$.
   Cela contredit le caractère majorant de E par T (on a un élément de E plus grand).
   — Si $b - a < 0$ ie $a - b > 0$.
   En particulier $T - \dfrac{\epsilon_T}{2} = a + \left(T + \dfrac{\epsilon_T}{2(a-b)}\right)(b-a) \in A$
   alors que $T \leqslant T + \dfrac{\epsilon_T}{2(a-b)}$.
   Cela contredit le caractère majorant de E par T (on a un élément de E plus grand).
   On a donc une contradiction dans tous les cas, puisqu'A est ouvert.

   $$\boxed{\text{Ainsi, } a + T(b-a) \notin A.}$$

3. $T \in [0,1]$, donc :
   — si $b - a > 0$: $a = a + 0(b-a) \leqslant a + T(b-a) \leqslant a + 1(b-a) = b$
   — si $b - a < 0$: $a = a + 0(b-a) \geqslant a + T(b-a) \geqslant a + 1(b-a) = b$
   Or $a, b \in I$ (car I contient A et B), donc $a + T(b-a) \in I$, qui est un intervalle.
   Donc $a + T(b-a) \in A \cup B$, mais d'après la question précédente : $a + T(b-a) \notin A$.

   $$\boxed{a + T(b-a) \in B.}$$

4. B est un ouvert, donc avec le même raisonnement qu'en 2.,
   on trouve nécessairement $a + T(b-a) \notin B$.
   On arrive donc à une contradiction !

   $$\boxed{\text{Si } I \text{ est un intervalle ouvert, on ne peut le partionner en deux intervalles ouverts distincts.}}$$

Exercice 4

Lemme des pics

Soit (u_n) une suite numérique, bornée.
Alors (u_n) admet une suite extraite croissante ou une suite extraite décroissante

1. La suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 2 + \frac{1}{n}$ et $u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$ vérifie :
   — (u_{2n}) est décroissante car $u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} = 2 + \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$
   — (u_{2n+1}) est décroissante car $u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$
   (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont bien deux suites extraites de (u_n).
   La première converge vers 2 et la seconde vers 1, donc (u_n) ne converge pas.

   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ définie par : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 2 + \frac{1}{n} \text{ et } u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n} \text{ vérifie les conditions recherchées}}$

2. On considère une suite (u_n) bornée.
   On note $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, m \geqslant n, u_n \leqslant u_m\}$
   (a) On suppose que P est infini.
   $P \subset \mathbb{N}$, donc P est énumérable :
   on peut écrire $P = \{n_1, n_2, \dots n_p \dots\}$ où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n_i < n_{i+1}$.
   On note $\varphi : i \mapsto n_i$. Alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante.
   Par définition de P, $u_{n_{i+1}} = u_{\varphi(i+1)} \geqslant u_{n_i} = u_{\varphi(i)}$.

   $\boxed{\text{Ainsi } (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite extraite, strictement croissante de } (u_n).}$

   (b) On suppose que P est fini.
   P est un ensemble fini de $\mathbb{N}$, il admet un plus grand élément : $M = \max P$.
   Alors pour tout $n > M$, $n \notin P$, donc $\exists\, n' \geqslant n$ tel que $u_{n'} < u_n$.
   Nous allons donc construire une suite décroissante, par récurrence.
   • On prend $\varphi(1) = M + 1$.
   • Supposons qu'on ait construit $\varphi(1)$, $\varphi(2)\dots\varphi(n)$, avec $\forall\, i < j \leqslant n$, $\varphi(i) < \varphi(j)$,
   Comme $\varphi(n) > \varphi(1) = M + 1$, alors $\varphi(n) \notin P$.
   Donc il existe $m > \varphi(n)$ tel que $u_m < u_{\varphi(n)}$ (sinon $\varphi(n) \in P$).
   $\{m \geqslant \varphi(n) \mid u_m < u_{\varphi(n)}\}$ est donc non vide, minorée.
   Notons alors $\varphi(n+1) = \min\{m \geqslant \varphi(n) \mid u_m < u_{\varphi(n)}\}$.
   On construit ainsi une fonction φ strictement décroissante sur $\mathbb{N}$,
   et $(u_{\varphi(n)})$ est décroissante.

   $\boxed{\text{Ainsi } (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite extraite, strictement décroissante de } (u_n).}$

   (c) Comme P est nécessairement fini ou infini,

   $\boxed{\text{le lemme de pics découle des deux questions précédentes.}}$

3. Seul la relation d'ordre total est nécessaire. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$ admettent une relation d'ordre total.
   Donc le lemme des pics existe également pour ces ensembles.
   Dans $\mathbb{C}$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la notion de suites croissantes n'a pas de sens.
   Sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, des parties de E, la relation d'inclusion n'est pas totale ; la démonstration telle que nous l'avons faite ne peut pas s'adapter.

4. Application. Soit (u_n) une suite bornée.
   Alors il existe φ strictement croissante tel que $u_{\varphi(n)}$ est croissante ou décroissante.
   Or $(u_{\varphi(n)})$ est bornée, également ; elle est donc convergente.
   Ainsi,

   $\boxed{(u_n) \text{ admet une suite extraite convergente. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.}}$