Devoir à la maison n°6
CORRECTION

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x$.

1. Par addition de fonctions de référence, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$.
   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   f étant continue, elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $I = [f(0), \lim_{+\infty} f[= [1, +\infty[$.

   $$\boxed{f \text{ établit une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ sur } I = [1, +\infty[.}$$

2. $\mathbb{N}^* \subset I$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n a un unique antécédent par f.

   $$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'équation : } f(x) = n, \text{ a une solution notée } u_n.}$$

3. $$\boxed{f(0) = 1, \text{ donc } u_1 = 0}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f(u_n) = n < n + 1 = f(u_{n+1})$. Or f est croissante donc $u_n < u_{n+1}$.

   $$\boxed{u_n \text{ est croissante.}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f(\ln n) = e^{\ln n} - \ln n = n - \ln n < n = f(u_n)$. Par croissance de f :

   $$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \ln n.}$$

   Et comme $\lim \ln n = +\infty$, (u_n) diverge vers $+\infty$ par minoration.

   $$\boxed{\lim(u_n) = +\infty}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n = f(u_n) = e^{u_n} - u_n$. En divisant par n : $\dfrac{e^{u_n}}{n} = 1 + \frac{u_n}{n}$.
   Or $f(2\ln n) = e^{2\ln n} - 2\ln n = n^2 - 2\ln(n) > n = f(u_n)$ dès que $n \geqslant 2$, donc $\ln n < u_n < 2\ln n$.
   Ainsi $\frac{u_n}{n} \to 0$, par encadrement et donc $\dfrac{e^{u_n}}{n} \to 1$.

   $$\boxed{\exp(u_n) \sim n}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, $e^{v_n} = e^{u_n - \ln n} = \dfrac{e^{u_n}}{n} \to 1$. Donc, en composant par $t \mapsto \ln t$, continue en 1,

   $$\boxed{v_n \to \ln 1 = 0}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$

   $$n = f(u_n) = e^{u_n} - u_n = e^{v_n + \ln n} - u_n = ne^{v_n} - u_n \Rightarrow u_n = n(e^{v_n} - 1)$$

   On sait que $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc $\dfrac{u_n}{v_n} = n\dfrac{e^{v_n} - 1}{v_n} \sim n$, donc $v_n \sim \dfrac{u_n}{n}$.
   Enfin, comme $v_n \to 0$, $u_n \sim \ln n$ et donc

   $$\boxed{v_n \sim \frac{\ln n}{n}}$$

9. On a donc

   $$\boxed{u_n = \ln n + v_n = \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$$

Problème

1. Soit $x \in A$, alors $x \in B$, donc $x \leqslant \sup B$.
   $\sup B$ est donc un majorant de A, $\sup A$ est le plus petit de ses majorants, donc

$$\boxed{\sup A \leqslant \sup B.}$$

2. On considère une suite (u_n) bornée, quelconque.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble U_n est bornée, non vide, inclus dans $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure et inférieure, d'après les propriétés de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les suite } (m_n) \text{ et } (M_n) \text{ sont bien définies.}}$$

   (b) (u_n) est bornée : $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_k \leqslant b$.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall\ k \geqslant n$, $a \leqslant u_k \leqslant b$ Ainsi a (respectivement b) est un minorant de l'ensemble U_n.
   $m_n = \inf\{u_k, k \geqslant n\}$ est le plus grand des minorants de cet ensemble : $a \leqslant m_n$ Ainsi b est un majorant de l'ensemble U_n.
   $M_n = \sup\{u_k, k \geqslant n\}$ est le plus grand des minorants de cet ensemble : $M_n \leqslant b$ Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a \leqslant m_n \leqslant M_n \leqslant b$.

$$\boxed{(m_n) \text{ et } (M_n) \text{ sont bornées.}}$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_{n+1} \cup \{u_n\}$.
   Donc $U_{n+1} \subset U_n$ et donc $M_{n+1} = \sup U_{n+1} \leqslant \sup U_n = M_n$. De même, on montre que si $A \subset B$, alors $\inf A \geqslant \inf B$.
   (car $\inf B$ est un minorant de A, et $\inf A$ en est le plus grand).
   Et donc $m_{n+1} = \inf U_{n+1} \geqslant \inf U_n = m_n$

$$\boxed{(m_n) \text{ est croissante et } (M_n) \text{ décroissante. Elles sont bornées donc convergentes.}}$$

3. Quelques exemples.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{-1, 1\}$, donc $m_n = -1$ et $M_n = 1$.

$$\boxed{\text{Ce sont des suites constantes : } \liminf u_n = -1 \text{ et } \limsup u_n = 1}$$

   (b) Dans ce cas u_n est décroissante de limite nulle. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n = 0$ et $M_n = \frac{1}{n+1}$.

$$\boxed{\liminf u_n = 0 = \limsup u_n}$$

   (c) Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \geqslant \epsilon$,
   Donc $\forall\ n \geqslant N$, $U_n \subset [\ell - \epsilon; \ell + \epsilon]$ et donc $\ell - \epsilon \leqslant m_n \leqslant M_n \leqslant \ell + \epsilon$.
   Donc $\forall\ n \geqslant N$, $|m_n - \ell| \leqslant \epsilon$ et $|M_n - \ell| \leqslant \epsilon$.

$$\boxed{\text{Donc } \liminf u_n = \limsup u_n = \ell}$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$.
   Supposons que $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell$. Donc $(m_n) \to \ell$ et $(M_n) \to \ell$.
   D'après le théorème de convergence par encadrement,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente (et de limite } \ell = \limsup u_n = \liminf u_n)).}$$

   (b) Soit $\epsilon > 0$. On note $\ell' = \lim(v_n)$.
   Il existe N tel que $\forall\ n \geqslant N$, $|v_n - \ell'| = |u_{\varphi(n)} - \ell| < \epsilon$.

$$\forall\ n \geqslant N, \qquad u_{\varphi(n)} - \epsilon < \ell' < u_{\varphi(n)} + \epsilon$$

$$\forall\ n \geqslant N, \qquad m_{\varphi(n)} - \epsilon < \ell' < M_{\varphi(n)} + \epsilon$$

   Puis en faisant tendre n vers l'infini (inégalité sur les suites) :

$$\forall\ \epsilon > 0 \qquad \ell' < \limsup u_n + \epsilon \qquad \text{et} \qquad \ell' > \liminf u_n - \epsilon$$

   Ceci est équivalent (équivalence vue en cours) :

$$\boxed{L_i \leqslant \ell' = \lim(v_n) = \lim(u_{\varphi(n)}) \leqslant L_s}$$

5. L'exemple 3.b (dans le cas de (m_n)), montre qu'il n'est pas toujours possible de trouver un terme $u_\varphi(n)$ qui vaut M_n, car M_n peut être directement égal à sa limite, sans qu'aucun terme de (u_n) ne le soit...
On va chercher à créer une suite $(u_{\varphi(n))}$ tel que φ croissante et $|u_{\varphi(n)} - \limsup u_n| \leqslant \frac{1}{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\varphi(n-1) \in \mathbb{N}$ donné.

$$\limsup u_n = \lim(M_n) \Rightarrow \exists\ N \mid \forall\ p \geqslant N, |M_p - \limsup u_n| < \frac{1}{2n} \qquad \text{avec } \epsilon = \frac{1}{2n}$$

Soit $p = \max(N, \varphi(n-1)+1)$, donc $p \geqslant N$.

$$M_p = \sup\{u_k, k \geqslant p\} \qquad \text{Donc : } \exists\ k_0 \geqslant p \mid |u_{k_0} - M_p| < \frac{1}{2n}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire :

$$\exists\ k_0 \geqslant p \geqslant \varphi(n-1)+1 \qquad |u_{k_0} - \limsup u_n| \leqslant |u_{k_0} - M_p| + |M_p - \limsup u_n| \leqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

Prenons $\varphi(n) = k_0$, on a donc φ croissante strictement et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - \limsup u_n| \leqslant \frac{1}{n}$.
On a ainsi crée (théorème de convergence par encadrement) :

$$\boxed{\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite extraite de } (u_n) \text{ qui converge vers } \limsup u_n}$$