# Devoir à la maison n°6

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

---

## Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x$.

1. Montrer que $f$ établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble $I$ à déterminer.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $f(x) = n$, a une solution unique sur $\mathbb{R}_+$, notée $u_n$.
3. Que vaut $u_1$ ?
4. Montrer que $u_n$ est croissante.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ln n$. En déduire la limite de $(u_n)$.
6. Montrer que $\exp(u_n) \sim n$.

On note $v_n = u_n - \ln n$.

7. Déduire de la question précédente que $v_n \to 0$.
8. Montrer ensuite que $v_n \sim \frac{\ln n}{n}$
   *On pourra exploiter, après justification,que* $e^{v_n} - 1 \sim v_n$
9. En déduire un développement asymptotique de $u_n$ à deux termes.

## Problème

On associe, à tout suite $(u_n)$ bornée, les deux suites $m(u)$ et $M(u)$ telles que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[m(u)]_n = \inf\{u_k, k \geqslant n\}$.
  *On notera* $(m_n)$ *au lieu de* $([m(u_n)]_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'il n'y a pas de doute sur la suite* $(u_n)$ *considérée.*
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[M(u)]_n = \sup\{u_k, k \geqslant n\}$ *On notera* $(M_n)$ *au lieu de* $([M(u_n)]_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'il n'y a pas de doute sur la suite* $(u_n)$ *considérée.*

On notera $U_n = \{u_k, k \geqslant n\}$.

1. Montrer que si $A$ et $B$ sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ alors
$$A \subset B \Longrightarrow \sup A \leqslant \sup B$$
2. On considère une suite $(u_n)$ bornée, quelconque.
   (a) Pourquoi les suite $(m_n)$ et $(M_n)$ sont bien définies.
   (b) Montrer que $(m_n)$ et $(M_n)$ sont bornées.
   (c) Montrer que $(m_n)$ est une suite croissante et $(M_n)$ une suite décroissante.
   En déduire qu'elles convergent.

   On note pour tout $(u_n)$ bornée, $\liminf u_n = \lim(m(u))_n$ et $\limsup u_n = \lim(M(u))_n$
3. Quelques exemples.
   (a) Calculer $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ pour $u : n \mapsto (-1)^n$.
   (b) Calculer $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ pour $u : n \mapsto \frac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ pour $u$, suite convergente vers $\ell$.
4. (a) On suppose (pour cette question) que $\liminf u_n = \limsup u_n$.
   Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.
   (b) Soit $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$, une suite extraite de $(u_n)$.
   On suppose que $v$ converge. Montrer que
$$\liminf u_n \leqslant \lim(v_n) \leqslant \limsup u_n$$
5. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)$ qui soit convergente et de limite $\limsup u_n$.
   (On a de même pour $L_i$, on a ainsi un résultat plus précis que celui de Bolzano-Weierstrass).