

Devoir à la maison n°-7 CORRECTION

Exercice 1 - Inégalité de Pompeiu

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $x, y, z \in \mathbb{R}$. Le rôle joué par x, y et z dans le calcul est symétrique, il y a bien un des trois nombres plus petit, un plus grand. On peut les appeler dans l'ordre x, y et z sans perte de généralité.

On peut donc supposer (de manière suffisante) : $x < y < z$.

En revanche, il n'est pas général de penser que $y \leq \frac{x+z}{2}$. Il faudra donc étudier les deux cas.

Supposons donc que $y \leq \frac{x+z}{2}$.

On a alors : $y \leq z \Rightarrow \frac{y+z}{2} \leq \frac{z+z}{2} = z$.

$$\text{et } x = \frac{x+x}{2} \leq \frac{y+z}{2} \Rightarrow 2x \leq y+z \Rightarrow 2x+2y+2z \leq 3y+3z \Rightarrow \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{y+z}{2}.$$

Ainsi, on a $\frac{y+z}{2} \in \left[\frac{x+y+z}{3}, z \right]$ (indépendant de l'hypothèse $y \leq \frac{x+z}{2}$).

Et donc, il existe $u \in [0, 1]$ tel que $\frac{y+z}{2} = u \frac{x+y+z}{3} + (1-u)z$.

On a également $x \leq z \Rightarrow \frac{x+z}{2} \leq \frac{z+z}{2} = z$.

$$\text{et } y \leq \frac{x+z}{2} \Rightarrow 2y \leq x+z \Rightarrow 2x+2y+2z \leq 3x+3z \Rightarrow \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{x+z}{2}.$$

Ainsi, on a $\frac{x+z}{2} \in \left[\frac{x+y+z}{3}, z \right]$.

Et donc, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\frac{x+z}{2} = t \frac{x+y+z}{3} + (1-t)z$.

Si on additionne ces relations, on trouve : $\frac{x+y+2z}{2} = (u+t) \frac{x+y+z}{3} + (2-(u+t))z$.

$$\text{Or } \frac{x+y+2z}{2} = \frac{3}{2} \frac{x+y+z}{3} + \frac{1}{2}z.$$

Or l'écriture sur un segment est unique, on peut identifier : $u+t = \frac{3}{2}$ (et donc $2-(u+t) = \frac{1}{2}$).

$$\text{Bilan : On a } x \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{x+z}{2} \leq y \leq \frac{y+z}{2} \leq z.$$

Les inégalités de convexité donne :

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) \leq uf\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-u)f(z) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x+z}{2}\right) \leq tf\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-t)f(z)$$

On a également $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$.

En additionnant ces trois inégalités :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \leq (u+t)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (2-(u+t))f(z) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

Et comme, $u+t = \frac{3}{2}$, en multipliant tout par $\frac{2}{3}$:

$$\boxed{\frac{2}{3} \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right] \leq \frac{1}{3} [f(x) + f(y) + f(z)] + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)}$$

Dans le cas où $y > \frac{x+z}{2}$, on a $x \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{x+z}{2} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq y \leq \frac{y+z}{2} \leq z$.

On décrit alors $\frac{x+y}{2}$ et $\frac{x+z}{2}$ sur le segment $[x, \frac{x+y+z}{3}]$ avec un u' et t' comme précédemment.

On montre alors de nouveau que $u' + t' = \frac{3}{2}$... (Exercice!)

Problème

On note $\mathcal{M}$, l'ensemble des matrices à coefficients réels, de taille 2. $(\mathcal{M}, +, \times)$ a une structure d'anneau. On note $\mathcal{G}$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ des matrices inversibles. On admet que $(\mathcal{G}, \times)$ est un groupe, on l'appelle le groupe linéaire (réel d'ordre 2).

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$,

- on note $\det M = ad - bc$, appelé déterminant de M
- on note $M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on appelle cette dernière matrice, la matrice transposée de M .

On note $\mathcal{O} = \{M \in \mathcal{M} \mid M^T \times M = I_2\}$, les éléments de $\mathcal{O}$ sont les matrices orthogonales.

On note $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M} \mid M^T = M\}$, les éléments de $\mathcal{S}$ sont les matrices symétriques.

1. Structure

- (a) On a évidemment l'inclusion ensembliste : $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$.

Puis la matrice nulle $0_2 \in \mathcal{S}$, donc $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Enfin, si $A, A' \in \mathcal{S}$, on peut écrire $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix}$

$$A - A' = A + (-A') = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & d + d' \end{pmatrix}.$$

Donc $A - A' \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}, +)$.

- (b) Si $A \in \mathcal{O}$, alors $A^T \times A = I_n$, donc A est inversible (d'inverse A^T).

Donc on a l'inclusion ensembliste : $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}$.

Puis la matrice identité $I_2 \in \mathcal{O} : I_2^T \times I_2 = I_2^2 = I_2$.

Ensuite, si $A \in \mathcal{O}$, alors $A^{-1} = A^T$ et donc

$$(A^{-1})^T A^{-1} = AA^{-1} = I_2$$

Ainsi $A^{-1} \in \mathcal{O}$. Enfin sur $A, A' \in \mathcal{O}$, alors

$$(A \times A')^T \times (A \times A') = (A')^T \underbrace{A^T A}_{=I_2} A' = (A')^T A' = I_2$$

donc $A \times A' \in \mathcal{O}$

$\mathcal{O}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{G}, \times)$.

- (c) Condition nécessaire et suffisante vérifiée par les éléments de $\mathcal{G}$.

- i. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$. Le calcul donne :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + ad - ad + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc - ad + ad + d^2 \end{pmatrix} \\ &= (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M^2 = (a+d)M - \det(M)I_2.$$

- ii. On a donc $(M - (a+d)I_2) \times M = M^2 - (a+d)M = -\det(M)I_2$.

Donc si $\det M \neq 0$, en notant $N = \frac{1}{\det M}((a+d)I_2 - M)$, $N \times M = I_2$.

Si $\det M \neq 0$, M est inversible avec $M^{-1} = \frac{1}{\det M}((a+d)I_2 - M)$.

- iii. Supposons maintenant que M est inversible, d'inverse N . Donc $1 = \det I_2 = \det MN = \det M \det N$.

Si $\det M = 0$, alors on a $1 = 0$. Impossible. Donc $\det M \neq 0$.

Réciproquement, si M est inversible, alors $\det M \neq 0$.

- (d) Description des éléments de $\mathcal{O}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose que $M \in \mathcal{O}$

i. Le calcul donne

$$M^T \times M = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = I_2$$

Donc $ab + cd = 0$ et $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$.

Si $b = 0$, alors $cd = 0$, mais $b^2 + d^2 = 1 = 0^2 + d^2$, donc on ne peut avoir $d = 0$.
donc nécessairement : $c = 0$, puis $a^2 = d^2 (= 1)$.

Si $b \neq 0$, alors $a = -\frac{c}{b}d$, et donc $1 = a^2 + c^2 = \frac{c^2}{b^2}d^2 + c^2 = \frac{c^2}{b^2}(d^2 + b^2) = \frac{c^2}{b^2}$.

Ainsi, $c^2 = b^2$ et donc $a^2 = 1 - c^2 = 1 - b^2 = d^2$.

Dans tous les cas $a^2 = d^2$.

ii. Supposons que $a = d$ et $d \neq 0$, donc $cd = -ab = -bd$. Alors $c = -b$.

Puis on trouve $a^2 + c^2 = 1$, donc $a \in [-1, 1]$. Il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $a = \cos \alpha$ ($\alpha = \arccos a$).

On a alors $c = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sin \alpha$.

si $c > 0$, on a donc $c = \sin \alpha$ et la matrice a la forme cherchée avec $\theta \leftarrow \alpha$.

si $c < 0$, alors $c = -\sin \alpha = \sin(-\alpha)$ et $a = d = \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

et la matrice a la forme cherchée avec $\theta \leftarrow -\alpha$.

Donc il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

iii. Supposons que $a = -d$ et $d \neq 0$, donc $cd = -ab = bd$. Alors $c = b$.

Puis on trouve $a^2 + c^2 = 1$, donc $a \in [-1, 1]$. Il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $a = \cos \alpha$ ($\alpha = \arccos a$).

On a alors $c = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sin \alpha$.

si $c > 0$, on a donc $c = \sin \alpha$ et la matrice a la forme cherchée avec $\theta \leftarrow \alpha$.

si $c < 0$, alors $c = -\sin \alpha = \sin(-\alpha)$ et $a = d = \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

et la matrice a la forme cherchée avec $\theta \leftarrow -\alpha$.

Donc il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

iv. Avant de faire la réciproque, il faut aussi analyser le cas $d = 0$.

On a alors $a = 0$, puis $b = \pm c$ et $b = \pm 1$, donc quatre cas possibles : $(b, c) \in \{(1, -1), (-1, 1), (1, 1), (-1, -1)\}$.

Mais cela correspond au cas précédent ii. pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, puis iii. pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$ respectivement.

Faisons la réciproque.

Considérons $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $M_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, alors

$$M_1^T \times M_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = I_2 \quad M_2^T \times M_2 = I_2$$

Finalement, par double inclusion

$$\mathcal{O} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \theta \in [-\pi, \pi] \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}; \theta \in [-\pi, \pi] \right\}$$

2. Propriété topologique de $\mathcal{M}$.

On dit que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si $\begin{cases} (a_n) \rightarrow a \\ (b_n) \rightarrow b \\ (c_n) \rightarrow c \\ (d_n) \rightarrow d \end{cases}$.

(a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$. On lui associe une suite (M_n) définie par : $M_n = \begin{pmatrix} a + \frac{1}{n} & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On a l'équivalence $M_n \in \mathcal{G} \iff \det(M_n) \neq 0$

Or $\det \begin{pmatrix} a + x & b \\ c & d \end{pmatrix} = dx + ad - bc$. Donc $\det(M_n) = 0 \iff \frac{d}{n} = bc - ad \iff n = \frac{d}{bc - ad}$.

Il y a donc au plus une valeur de n (ou aucune si $\det M = 0$) qui rend M_n non inversible.

Il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(M_{\varphi(n)}) \in \mathcal{G}$.

Clairement : $\lim(M_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = M$.

(b) Soit (Q_n) , une suite de matrices orthogonales (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{O}$).

On note $Q_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ (on pourrait exploiter mieux encore 1.(d)iv, mais ce n'est pas nécessaire).

On a donc $a_n \in [-1, 1]$, elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente. On note φ_1 cette extraction.

On a ensuite $b_{\varphi_1(n)} \in [-1, 1]$, elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente. On note φ_2 cette extraction.

On a ensuite $c_{\varphi_1(\varphi_2(n))} \in [-1, 1]$, elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente. On note φ_3 cette extraction.

On a ensuite $d_{\varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(n)))} \in [-1, 1]$, elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente. On note φ_4 cette extraction.

Or $\psi := \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \varphi_4$ sont des fonctions extractrices de φ_1 , de $\varphi_1 \circ \varphi_2$ et de $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$. Ainsi les quatres suites $(a_{\psi(n)})_n$, $(b_{\psi(n)})_n$, $(c_{\psi(n)})_n$ et $(d_{\psi(n)})_n$ sont convergentes.

Il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(Q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{O}$. On note $Q = \lim Q_{\psi(n)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Donc $a_n^2 + c_n^2 = 1$, donc $a_{\psi(n)}^2 + c_{\psi(n)}^2 = 1$ et en passant à la limite $A^2 + C^2 = 1$.

Donc $b_n^2 + d_n^2 = 1$, donc $b_{\psi(n)}^2 + d_{\psi(n)}^2 = 1$ et en passant à la limite $B^2 + D^2 = 1$.

Donc $a_n b_n + c_n d_n = 0$, donc $a_{\psi(n)} b_{\psi(n)} + c_{\psi(n)} d_{\psi(n)} = 0$ et à la limite $AB + CD = 0$.

Cela donne donc $Q^T \times Q = I_n$, donc

La limite de $(Q_{\psi(n)})$ est une matrice orthogonale.

3. Diagonalisation orthogonale d'une matrice symétrique de $\mathcal{S}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, une matrice de $\mathcal{S}$.

(a) On suppose que $a - d \neq 0$. On note $\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2b}{a-d} \right)$ et $U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{O}$.

$$\begin{aligned} U^T \times M \times U &= \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta & b \cos \theta + d \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta & -b \sin \theta + d \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + d \sin^2 \theta & (d-a) \cos \theta \sin \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ (d-a) \cos \theta \sin \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & a \sin^2 \theta - 2b \cos \theta \sin \theta + d \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ et $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$.

Donc $(d-a) \cos \theta \sin \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{1}{2}(d-a) \sin(2\theta) + b \cos(2\theta)$.

Or $\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2b}{a-d}$. Donc $(a-d) \sin 2\theta = 2b \cos 2\theta$ et $\frac{1}{2}(d-a) \sin(2\theta) + b \cos(2\theta) = 0$.

La matrice $U^T \times M \times U$ est diagonale.

(b) On suppose que $a - d = 0$. On note $U = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}$.

Le calcul donne

$$\begin{aligned} U^T \times M \times U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b & b+d \\ -a+b & -b+d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+2b+d & (d-a) \\ (d-a) & a-2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+d & 0 \\ 0 & a-2b+d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $U^T \times M \times U$ est diagonale.

(c) On a étudié tous les cas possibles dans les questions précédentes. Puis comme $U^T = U^{-1}$, puisque U est orthogonale. Donc

Si $M \in \mathcal{S}$, alors il existe $U \in \mathcal{O}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $M = U \times \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \times U^T$.

On cherche à démontrer le théorème de décomposition polaire :

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}$, il existe $(S, Q) \in \mathcal{O} \times \mathcal{S}$ tel que $M = Q \times S$.

4. Décomposition polaire pour des matrices $M \in \mathcal{G}$.

(a) Analyse (i à v). On suppose qu'il existe $(S, Q) \in \mathcal{O} \times \mathcal{S}$ tel que $M = Q \times S$.

i. D'après l'énoncé : $M^T = S^T \times Q^T = SQ^T$ car S est symétrique, puis

$$M^T \times M = (SQ^T) \times (QS) = S(Q^T Q)S = SS = S^2$$

ii. Notons $A = M^T \times M$, alors $A^T = (M^T M)^T = M^T \times (M^T)^T = M^T \times M = A$.
Donc A est symétrique.

D'après la question 3.,

$$\text{il existe } U \in \mathcal{O}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = U \times \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \times U^T.$$

On sait également que $A = S^2$, donc $\det A = \det(S) > 0$

$$\begin{aligned} \text{alors que } \det A &= \det U \times \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \det(U^T) = \det U \times (\lambda\mu) \det U^T = \lambda\mu \det U \det U^T \\ &= \lambda\mu \det(UU^T) = \lambda\mu \det I_2 = \lambda\mu. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lambda\mu = (\det S)^2 > 0 \text{ (non nul sinon } \det M = \det S \det Q = 0, \text{ faux).}$$

iii. On considère la matrice colonne $X = U \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$X^T A X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda$$

$$\text{Alors que } X^T A X = X^T M^T M X = (MX)^T (MX).$$

$$\text{Si l'on note } MX = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ (colonne), on a } X^T A X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 \geq 0.$$

$$\text{Donc } \lambda = x^2 + y^2 \geq 0.$$

De même avec $Y = U \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on trouve $\mu \geq 0$.

$$\lambda > 0 \text{ et } \mu > 0.$$

$$\lambda \geq 0, \mu \geq 0.$$

On a terminé l'analyse, on a suffisamment d'informations pour trouver un couple (S, Q) satisfaisant.

iv. Considérons maintenant $S = U \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \times U^T$ Alors $S^2 = U \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \times$

$$U^T U \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \times U^T = U \times \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \times U^T = M^T M$$

$$\text{Puis } S^T = (U^T)^T \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \times U^T = S$$

$$\text{donc } S \in \mathcal{S} \text{ et } S^2 = M^T M.$$

v. Notons que S est bien inversible, car $\det S = \sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} = \sqrt{\lambda\mu} = \sqrt{\det M^2} = |\det M| \neq 0$.
Notons alors $Q = M \times S^{-1}$, on a donc $M = SQ$ et

$$Q^T Q = (S^{-1})^T M^T M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_2$$

car $SS^{-1} = I_2$, donc si l'on transpose : $(S^{-1})^T S^T = I_2$, or $S^T = S$, donc $(S^{-1})^T S = I_2$,
donc $(S^{-1})^T = S^{-1}$

$$\text{Donc } Q \in \mathcal{O}$$

vi. On a construit, pour toute matrice M inversible une matrice S symétrique et Q orthogonale telles que $M = SQ$.

$$\text{Ainsi si } M \in \mathcal{G}, \text{ il existe } (S, Q) \in \mathcal{S} \times \mathcal{O} \text{ tel que } M = SQ$$

vii. Montrer que $Q = M \times S^{-1} \in \mathcal{O}$.

viii. Conclure dans le cas $M \in \mathcal{G}$

(b) On suppose maintenant que M est quelconque.

i. On reprend le résultat de la question 2.(a)

Il existe une suite de matrice $(M_n) \in \mathcal{G}$ telle que $(M_n) \rightarrow M$.

ii. On applique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les résultats de la question précédente ($M_n \in \mathcal{G}$) :

Il existe deux suites $(S_n) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ et $(Q_n) \in \mathcal{O}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout entier n , $M_n = Q_n \times S_n$

iii. On applique maintenant le résultat de la question 2.(b)

Il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $(Q_{\psi(n)})$ converge vers Q dans $\mathcal{O}$.

iv. $S_{\psi(n)} = Q_{\psi(n)}^{-1} M_{\varphi(n)} = Q_{\psi(n)}^T \times M_{\psi(n)}$.

Il s'agit d'un produit de deux matrices, on a besoin de regarder coefficients par coefficients.

Supposons que $M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{\varphi(n)} = \begin{pmatrix} \alpha_{\varphi(n)} & \gamma_{\varphi(n)} \\ \beta_{\varphi(n)} & \delta_{\varphi(n)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{\varphi(n)} & b_{\varphi(n)} \\ c_{\varphi(n)} & d_{\varphi(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\varphi(n)}a_{\varphi(n)} + \gamma_{\varphi(n)}c_{\varphi(n)} & \alpha_{\varphi(n)}b_{\varphi(n)} + \gamma_{\varphi(n)}d_{\varphi(n)} \\ \beta_{\varphi(n)}a_{\varphi(n)} + \delta_{\varphi(n)}c_{\varphi(n)} & \beta_{\varphi(n)}b_{\varphi(n)} + \delta_{\varphi(n)}d_{\varphi(n)} \end{pmatrix}$$

Or chacune de ces suites convergent,

puisque les suites $(a_n) \dots (d_n)$ convergent vers $a \dots d$ respectivement,

et les suites $(\alpha_{\varphi(n)}) \dots (\delta_{\varphi(n)})$ convergent vers $\alpha, \dots \delta$.

Donc $S_{\varphi(n)}$ converge bien vers S .

$$S = \begin{pmatrix} \alpha a + \gamma c & \alpha b + \gamma d \\ \beta a + \delta c & \beta b + \delta d \end{pmatrix} = Q^T \times M$$

Puis comme S_n est symétrique, on a pour tout n ,

$$\alpha_{\varphi(n)}b_{\varphi(n)} + \gamma_{\varphi(n)}d_{\varphi(n)} = \beta_{\varphi(n)}a_{\varphi(n)} + \delta_{\varphi(n)}c_{\varphi(n)}$$

En passant à la limite : $\alpha b + \gamma d = \beta a + \delta c$, donc

$S \in \mathcal{S}$.

v. On a donc $M = SQ$, avec $Q \in \mathcal{O}$ et $S \in \mathcal{S}$

Le théorème de décomposition spectral est vrai aussi pour M non inversible.