

Devoir à la maison n°7

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'énoncé des **formules utilisées**.

Exercice 1 - Inégalité de Pompeiu

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\frac{2}{3} \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right] \leq \frac{1}{3} [f(x) + f(y) + f(z)] + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

On pourra supposer $x \leq y \leq z$ et $y \leq \frac{x+z}{2}$ (quelles (famille d')inégalités, sont « SPDG » ?)

et exploiter $u, t \in [0, 1]$ tels que $\frac{y+z}{2} = u \frac{x+y+z}{3} + (1-u)z$ et $\frac{x+z}{2} = t \frac{x+y+z}{3} + (1-t)z \dots$

Problème

On note $\mathcal{M}$, l'ensemble des matrices à coefficients réels, de taille 2. $(\mathcal{M}, +, \times)$ a une structure d'anneau. On note $\mathcal{G}$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ des matrices inversibles. On admet que $(\mathcal{G}, \times)$ est un groupe, on l'appelle le groupe linéaire (réel d'ordre 2).

On rappelle que M est inversible, si il existe $N \in \mathcal{M}$ telle que $N \times M = I_2$.

Dans ce cas N est unique, notée M^{-1} et $M \times N = I_2$ également.

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$,

- on note $\det M = ad - bc$, appelé déterminant de M .

On admet que pour tout A, B : $\det(A \times B) = \det A \times \det B$.

- on note $M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on appelle cette dernière matrice, la matrice transposée de M .

Notons que l'on a la relation algébrique : $\forall A, B \in \mathcal{M}, (A \times B)^T = B^T \times A^T$.

On note $\mathcal{O} = \{M \in \mathcal{M} \mid M^T \times M = I_2\}$, les éléments de $\mathcal{O}$ sont les matrices orthogonales.

On note $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M} \mid M^T = M\}$, les éléments de $\mathcal{S}$ sont les matrices symétriques.

1. Structure

(a) On admet que $(\mathcal{M}, +)$ est un groupe. Montrer que $\mathcal{S} < \mathcal{M}$.

(b) Montrer également que $\mathcal{O}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{G}, \times)$.

(c) Condition nécessaire et suffisante vérifié par les éléments de $\mathcal{G}$.

i. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$. Montrer que $M^2 = (a+d)M - \det(M)I_2$.

ii. En déduire que si $\det M \neq 0$, M est inversible avec $M^{-1} = \frac{1}{\det M}((a+d)I_2 - M)$.

iii. Réciproquement, montrer que si M est inversible, alors $\det M \neq 0$.

(d) Description des éléments de $\mathcal{O}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose que $M \in \mathcal{O}$

i. Montrer que $a^2 = d^2$

ii. Supposons que $a = d \neq 0$, montrer alors que $b = -c$; puis, qu'il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

iii. Supposons que $a = -d \neq 0$, montrer alors que $b = c$; puis, qu'il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

iv. Faire la réciproque qui permet de décrire le groupe $\mathcal{O}$ comme réunion de deux ensembles paramétrés chacun bijectivement par une variable de $[0, 2\pi[$.

2. Propriété topologique de $\mathcal{M}$.

On dit que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si $\begin{cases} (a_n) \rightarrow a \\ (b_n) \rightarrow b \\ (c_n) \rightarrow c \\ (d_n) \rightarrow d \end{cases}$.

(a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$. On lui associe une suite (M_n) définie par : $M_n = \begin{pmatrix} a + \frac{1}{n} & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(M_{\varphi(n)}) \in \mathcal{G}$.
Quelle est la limite de $(M_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$?

(b) Soit (Q_n) , une suite de matrices orthogonales (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{O}$).
Montrer qu'il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(Q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
Montrer que la limite de $(Q_{\psi(n)})$ est une matrice orthogonale.

3. Diagonalisation orthogonale d'une matrice symétrique de $\mathcal{S}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, une matrice de $\mathcal{S}$.

(a) On suppose que $a - d \neq 0$. On note $\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2b}{a-d} \right)$ et $U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{O}$.
Calculer $U^T \times M \times U$. Que constatez-vous ?

(b) On suppose que $a - d = 0$. On note $U = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}$.
Calculer $U^T \times M \times U$. Que constatez-vous ?

(c) En déduire que si $M \in \mathcal{S}$, alors il existe $U \in \mathcal{O}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = U \times \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \times U^T$$

On cherche à démontrer le théorème de décomposition polaire :

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}$, il existe $(S, Q) \in \mathcal{O} \times \mathcal{S}$ tel que $M = Q \times S$.

4. Décomposition polaire pour des matrices $M \in \mathcal{G}$.

(a) Analyse (i à iii). On suppose qu'il existe $(S, Q) \in \mathcal{O} \times \mathcal{S}$ tel que $M = Q \times S$.

i. Montrer que $M^T \times M = S \times S$

ii. En exploitant les questions 3., montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$M^T \times M = U \times \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \times U^T \text{ et } \lambda\mu = \det S^2 > 0$$

iii. On considère la matrice colonne $X = U \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Evaluer $X^T M^T M X$ de deux façons, en déduire que $\lambda \geq 0$.

On admet de même que $\mu \geq 0$. (fin de l'analyse)

iv. Montrer que si $S' = U \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \times U^T$ alors $S \in \mathcal{S}$ et $S^2 = M^T \times M$

v. Montrer que $Q = M \times S^{-1} \in \mathcal{O}$.

vi. Conclure dans le cas $M \in \mathcal{G}$

(b) On suppose maintenant que M est quelconque.

i. Montrer qu'il existe une suite de matrice $(M_n) \in \mathcal{G}$ telle que $(M_n) \rightarrow M$.

ii. En déduire qu'il existe deux suites de matrices $(S_n) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ et $(Q_n) \in \mathcal{O}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout entier n , $M_n = Q_n \times S_n$

iii. Montrer qu'il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $(Q_{\psi(n)})$ converge dans $\mathcal{O}$ vers une matrice Q .

iv. (* - ne pas aller trop vite)

Montrer que $(S_{\psi(n)})$ converge également vers une matrice S , puis que $S \in \mathcal{S}$.

v. Conclure