

Devoir à la maison n°8 CORRECTION

Exercice - Une formule de Legendre

Soient $n \geq 1$ et p un nombre premier. On se propose de calculer $m = v_p(n!)$.

On suppose que n s'écrit en base p ,

$$n = a_r p^r + a_{r-1} p^{r-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad a_r \neq 0, \quad a_r, a_{r-1}, \dots, a_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$$

1. Soit $k \in \{0, 1, \dots, r\}$. Comme pour tout k , $a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $p^k \leq a_k p^k < p^{k+1}$.
Puis, pour tout $h \leq r$, (télescopage)

$$\sum_{k=0}^h a_k p^k \leq \sum_{k=0}^h (p-1) p^k = \sum_{k=0}^h p^{k+1} - p^k = p^{h+1} - 1 < p^{h+1}$$

Donc pour tout $h \leq r$,

$$\frac{n}{p^h} = \underbrace{\sum_{k=h}^r a_k p^{k-h}}_{\in \mathbb{N}^*} + \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{h-1} a_k p^k}{p^h}}_{\in [0,1[} \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{p^h} \right\rfloor = \sum_{k=h}^r a_k p^{k-h}$$

Donc

$$\left\lfloor \frac{n}{p^h} \right\rfloor - p \left\lfloor \frac{n}{p^{h+1}} \right\rfloor = \sum_{k=h}^r a_k p^{k-h} - p \sum_{k=h+1}^r a_k p^{k-h-1} = \sum_{k=h}^r a_k p^{k-h} - \sum_{k=h+1}^r a_k p^{k-h} = a_h p^0 = a_h$$

2. $n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \times 1 = \prod_{k \leq n} k$.

Remarques !

Si l'on demande d'étudier les diviseurs de $226!$ et en particulier de savoir combien sont divisibles par 10, il suffit de compter le nombre de nombres divisibles par 10, il y en a 22 : 10, 20, 30, ... 220, mais dans ceux-ci 2 sont divisibles par 100 : 100 et 200.

Si l'on s'intéresse à un nombre N écrit $a_r a_{r-1} \dots a_0$ en base 10, il y en a $a_r a_{r-1} \dots a_1$ divisible par 10 et parmi ceux-ci, il y en a $a_r a_{r-1} \dots a_2$ divisibles par 100 et parmi ceux-ci $a_r a_{r-1} \dots a_3$ divisibles par 1000. ...
On suit ici la même idée.

On considère donc $n = a_r p^r + a_{r-1} p^{r-1} + \dots + a_1 p + a_0$.

Soit $k \leq n$, retrouvé dans le produit $n!$.

On peut supposer que k s'écrit également en base p : $k = b_r p^r + b_{r-1} p^{r-1} + \dots + b_1 p + b_0$.

Pour tout $i \leq r$, $p^i | k$ si et seulement si $b_0 = b_1 = \dots = b_{i-1} = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} V_i &:= \{k \leq n \text{ tq } p^i | k\} = \{k = b_r p^r + b_{r-1} p^{r-1} + \dots + b_i p^i \mid k \leq n\} \\ &= \{p^i (b_r p^{r-i} + b_{r-1} p^{r-1-i} + \dots + b_i) \mid b_r p^{r-i} + b_{r-1} p^{r-1-i} + \dots + b_i \leq a_r p^{r-i} + a_{r-1} p^{r-1-i} + \dots + a_i\} \end{aligned}$$

$$\text{card} V_i = \text{card}(\{k \leq n \text{ tq } p^i | k\}) = a_r p^{r-i} + a_{r-1} p^{r-1-i} + \dots + a_i = \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

d'après un calcul précédent. Puis, on a la somme :

$$\begin{aligned} m &= v_p(n!) = v_p \left(\prod_{k \leq n} k \right) = \sum_{k \leq n} v_p(k) = \sum_{i=0}^r \left(\sum_{k \mid v_p(k)=i} 1 \right) = \sum_{i=0}^r \left(\sum_{k \in V_i, k \notin V_{i+1}} 1 \right) \\ &= \sum_{i=0}^r \left(i \sum_{k \in V_i, k \notin V_{i+1}} 1 \right) = \sum_{i=0}^r i (\text{card} V_i - \text{card} V_{i+1}) = \sum_{i=0}^r i \text{card} V_i - \sum_{i=0}^r i \text{card} V_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^r i \text{card} V_i - \sum_{i=1}^{r+1} (i-1) \text{card} V_i = 0 + \sum_{i=1}^r [i - (i-1)] \text{card} V_i = \sum_{i=1}^r \text{card} V_i \end{aligned}$$

$$m = \sum_{k=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

3. Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. On a déjà répondu à cette question là :

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{i=k}^r a_i p^{i-k}$$

4. On a alors :

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=k}^r a_i p^{i-k} \right) = \sum_{1 \leq k \leq i \leq r} a_i p^{i-k} = \sum_{i=1}^r \left(a_i \sum_{k=1}^i p^{i-k} \right) \underbrace{=}_{j=i-k} \sum_{i=1}^r \left(a_i \sum_{j=0}^{i-1} p^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \left(a_i \frac{p^i - 1}{p - 1} \right) = \frac{1}{p - 1} \left(\sum_{i=1}^r a_i p^i - \sum_{i=1}^r a_i \right) = \frac{1}{p - 1} \left(\left[\sum_{i=1}^r a_i p^i + a_0 p^0 \right] - \left[\sum_{i=1}^r a_i + a_0 \right] \right) \end{aligned}$$

$$m = \frac{n - S}{p - 1}, \text{ avec } S := \sum_{k=0}^r a_k \quad (\text{formule de Legendre})$$

5. On a la décomposition de 1000 en base 2 :

$$1\,000 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 = [11\,1110\,1000]_2$$

Et donc $S_2(1\,000) = 6$, et ainsi

$$m = \frac{1000 - 6}{2 - 1} = 994$$

Problème - Système de congruence

I. Lemme chinois

1. Soient a, b deux entiers positifs premiers entre eux, et soient $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$.

On considère le système de congruences :

$$(S) \begin{cases} n \equiv r_1 & [a] \\ n \equiv r_2 & [b] \end{cases}$$

(a) Comme a et b sont premiers entre, eux, le théorème de Bézout énonce

$$\boxed{\text{Il existe } a, b \in \mathbb{Z} \text{ tels que } au + bv = 1.}$$

(b) Modulo a :

$$r_0 \equiv aur_2 + bvr_1 \equiv aur_2 + bvr_1 + aur_1 \equiv r_1(bv + au) \equiv r_1[a]$$

De même, modulo b

$$r_0 \equiv aur_2 + bvr_1 \equiv aur_2 + bvr_1 + bvr_2 \equiv r_2(au + bv) \equiv r_2[b]$$

$$\boxed{\text{Donc si } r_0 = aur_2 + bvr_1, \text{ alors } r_0 \text{ est une solution de } (S).}$$

(c) Soit n une solution de (S) , alors

$$n - r_0 \equiv r_1 - r_1 = 0[a]$$

Donc $a|n - r_0$. De même $b|n - r_0$.

Enfin, $a \wedge b = 1$,

donc d'après la décomposition en facteurs relativement premiers : $ab|(n - r_0)$.

Autre façon d'écrire : $n \equiv r_0[ab]$.

Réciproquement, si $n \equiv r_0[ab]$, alors $ab|n - r_0$, donc $a|n - r_0$ et $n \equiv r_0 \equiv r_1[a]$.

de même $b|n - r_0$ et $n \equiv r_0 \equiv r_2[b]$.

Bilan :

$$\boxed{\text{les solutions de } (S) \text{ sont exactement tous les entiers } n \text{ tels que } n \equiv r_0[ab].}$$

2. Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de n pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui-ci reçoit 3 pièces. La première information : « Une bande de 17 pirates dispose... le reste au cuisinier (non pirate). Celui-ci reçoit 3 pièces », se traduit par l'équation : $17|n - 3$, ou encore $n \equiv 3[17]$. La seconde information signifie de même que $n \equiv 4[11]$. Enfin, la dernière information précise que $n \equiv 5[6]$. Finalement ce que l'on cherche c'est n . On va exploiter les résultats trouvés précédemment (lemme chinois) en résolvant le système en deux temps. Comme $17 \wedge 11 = 1$ et que $1 = 2 \times 17 - 3 \times 11$:

$$\begin{cases} n \equiv 3 & [17] \\ n \equiv 4 & [11] \end{cases} \iff n \equiv 2 \times 17 \times 4 - 3 \times 11 \times 3 \equiv 136 - 99 \equiv 37[187]$$

Puis comme $187 \wedge 6 = 1$ et que $1 = 187 - 31 \times 6$

$$\begin{cases} n \equiv 3 & [17] \\ n \equiv 4 & [11] \\ n \equiv 5 & [6] \end{cases} \iff \begin{cases} n \equiv 37 & [187] \\ n \equiv 5 & [6] \end{cases} \iff n \equiv 1 \times 187 \times 5 - 31 \times 6 \times 37 \equiv -5947 \equiv 785[1122]$$

On trouve finalement que $n = 785 + 1122k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

La fortune minimale que peut espérer le cuisinier est donc égale à 785 pièces d'or

II. Dénombrants

Dans toute cette partie, pour x réel, on désigne par $[x]$ la partie entière de x .

1. Dans cette question on cherche à résoudre l'équation $(E) : 2x + 5y = 2018$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

(a) $2018 - 2 \times 9 = 2000 = 5 \times 400$.

Un couple de solutions est par exemple $(9, 400) \in \mathbb{N}^2$.

(b) $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de (E)

$$\iff 2x + 5y = 2018 = 2x_0 + 5y_0$$

$$\iff 2(x - x_0) = 5(y_0 - y)$$

Cela implique que $2|5(y_0 - y)$, donc $2|y_0 - y$ (lemme de Gauss car $2 \wedge 5 = 1$), donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = y_0 + 2k$.

Mais Z'alors, $2(x - x_0) = -2 \times 5 \times k$, donc (par intégrité de $\mathbb{Z}$) : $5k = x_0 - x$.

et donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 - 5k$ et $y = y_0 + 2k$.

Réciproquement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 - 5k$ et $y = y_0 + 2k$,

alors $2(x - x_0) - 5(y_0 - y) = 10k - 10k = 0$. On a vu que c'était équivalent à (x, y) solution de (E) .

Bilan

$(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie (E) ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 - 5k$ et $y = y_0 + 2k$

(c) En reprenant $x_0 = 9$ et $y_0 = 400$, pour obtenir une solution sur E , on a les conditions suivantes à respecter :

$$x = 9 - 5k \geq 0 \text{ et } y = 400 + 2k \geq 0 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \iff k \geq \left[\frac{-9}{5}; 200 \right] \cap \mathbb{Z}$$

Ainsi, le nombre de solutions distinctes de (E) dans $\mathbb{N}^2$ est égal à

$$\text{card} \left(\left[\frac{-9}{5}; 200 \right] \right) = 200 - (-1) + 1 = 202$$

Il y a 202 solutions entières de (E) dans $\mathbb{N}^2$

Dorénavant, a et b désignent deux entiers naturels non nuls.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, D_n le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ax + by = n$.

2. Une presque-formule.

(a) Comme $a, b > 0$, alors il faut prendre $x = y = 0$, sinon $ax + by > 0$.

$$D_0 = 1$$

(b) Soit (x, y) une solution de $ax + by = n$.

Soit a' et $b' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = a' \times (a \wedge b)$ et $b = b' \times (a \wedge b)$.

Alors $(a \wedge b) \times (a'x + b'y) = n$ et donc nécessairement $a \wedge b | n$.

Par contraposée si $a \wedge b$ ne divise pas n , il n'y a aucune solution au problème.

Lorsque $a \wedge b$ ne divise pas n , alors $D_n = 0$

(c) On suppose maintenant que $a \wedge b = 1$.

i. D'après l'identité de Bézout, il existe $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ax_1 + by_1 = 1$.

Faisons la division euclidienne de x_1 par b : $x_1 = bq_1 + x_2$, avec $x_2 \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$.

on a alors $1 = a(bq_1 + x_2) + by_1 = ax_2 + b(y_1 + aq_1)$.

Notons $y_2 = -y_1 - aq_1$. Alors $1 = ax_2 - by_2$.

Comme $ax_2 > 1$ (produit de nombre positif), alors $by_2 > 0$ et donc $y_2 \in \mathbb{N}$.

On a trouvé $(X, Y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $aX - bY = 1$.

ii. On a alors $anX - bnY = n$.

Tout autre nombre $(x, y) \in \mathbb{Z}$ vérifiant $ax + by = n$ est de la forme

$x = nX - kb$ avec $y = -nY + ka$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (même raisonnement qu'en II.1.(b).).

On a alors $x \geq 0$ ssi $k \leq \frac{nX}{b}$.

On a également $y \geq 0$ ssi $k \geq \frac{nY}{a}$.

Ainsi

D_n est le nombre d'entiers $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{nY}{a} \leq \ell \leq \frac{nX}{b}$.

iii. Soient x et y deux réels, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$.

Donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier, plus petit que $x + y$.

Comme $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand des entiers plus petits que $x + y$: $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

De même, avec $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ et le même genre de raisonnement :

$\lfloor x + y \rfloor + 1 \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, donc $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Par conséquent :

$$0 \leq \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq 1$$

Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor + \epsilon$ avec $\epsilon \in \{0, -1\}$

iv. Donc, d'après la question i., puis ii., en notant $x = \frac{nX}{b}$ et $y = \frac{-nY}{a}$:

$$D_n = \text{Card} \left(\left[\frac{nY}{a}, \frac{nX}{b} \right] \cap \mathbb{N} \right) = \text{Card}([-y, x] \cap \mathbb{N}) = \text{Card}(\llbracket -\lfloor y \rfloor, \lfloor x \rfloor \rrbracket)$$

Ainsi

$$D_n = \lfloor x \rfloor - (-\lfloor y \rfloor) + 1 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 = \lfloor x + y \rfloor + \epsilon + 1$$

$$D_n = \left\lfloor \frac{nX}{b} - \frac{nY}{a} \right\rfloor + \epsilon + 1 = \left\lfloor \frac{n(aX - bY)}{ab} \right\rfloor + \epsilon + 1 = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor + \epsilon + 1$$

Par conséquent : $D_n \in \{\lfloor \frac{n}{ab} \rfloor; \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor + 1\}$.

Pour 1.(c), on avait, $n = 2018$, $a = 2$, $b = 5$, et donc $\lfloor \frac{n}{ab} \rfloor = \lfloor \frac{2018}{10} \rfloor = 201$.

Et donc on vérifie bien que $D_{2018} = 202 \in \{201, 202\}$

Désormais, on suppose que $a > b \geq 2$ désignent deux entiers premiers entre eux.

3. La formule de POPOVICIU.

(a) Cela devient classique (comme en 2.(c).i) :

Considérons $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha_0 a + \beta_0 b = 1$ (Bézout à a et b , premiers entre eux).

Alors $\alpha_0 a \equiv 1[b]$ et $\beta_0 b \equiv 1[a]$.

Procédons par analyse : si $\alpha a \equiv 1[b]$, alors $\alpha a \equiv \alpha_0 a[b]$, donc $b | (\alpha - \alpha_0)a$.

et comme $b \wedge a = 1$, alors il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha_0 = hb + \alpha$.

Et la condition $\alpha \in [0, b[$, fait qu'on reconnait la division euclidienne de α_0 par b .

Le reste est défini par cette division de manière unique.

Notre analyse nous assure l'unicité de α_0 .

De même toujours par analyse, on constate que

β est nécessairement, le reste de la division euclidienne de β_0 par a .

Faisons alors la synthèse. En prenant $\alpha = \alpha_0 \% b$ et $\beta = \beta_0 \% a$ (notation Python).

Alors $\alpha a - \beta b = \alpha_0 a + hb a - \beta_0 b - h' a b = \alpha_0 a - \beta_0 b + (h - h')ab = 1 + Hab$.

Or on sait, par définition/construction que $(\alpha, \beta) \in [0, b[\times [0, a[$, donc $\alpha a - \beta b \in] - ab, ab[$.

Il faut donc, nécessairement, que $H = 0$ et donc $\alpha a - \beta b = 1$.

Par analyse-synthèse :

$$\boxed{\text{il existe un unique couple d'entiers } (\alpha, \beta) \in [1, b[\times [1, a[\text{ tel que } \begin{cases} \alpha a \equiv 1 & [b] \\ \beta b \equiv 1 & [a] \end{cases}}$$

On ne peut avoir α (ou β) nul, sinon le système donnerait $1 \equiv 0[b]$ (ou $[a]$ respectivement)

(b) $\alpha \in [1, b[$, alors $\alpha a > 1$ et donc nécessairement $\gamma < 0$.

Comme γ est entier $\gamma \leq -1$.

Par ailleurs, $\alpha < b$, donc $-\gamma b = \alpha a - 1 < ab - 1$, donc $\gamma b > -ab + 1$, i.e $\gamma > \frac{1}{b} - a$.

Comme γ est entier $\gamma \geq 1 - a$.

$$\boxed{\text{Donc } \gamma \in [1 - a; -1].}$$

(c) On a alors $\alpha a + \gamma b = 1$.

Et en notant $\beta' = \gamma + a$ (i.e $-\gamma = a - \beta'$), on a $\beta' \in [1, a - 1]$.

Ce β' est donc LE β cherché en 3.(a)..

Donc $\beta = \gamma + a$ i.e. $\gamma = -(a - \beta)$ et ainsi

$$\boxed{\alpha a - (a - \beta)b = 1}$$

(d) On se souvient que $D_n = \text{Card} \left\{ \ell \in \mathbb{N} \mid \frac{nY}{a} \leq \ell \leq \frac{nX}{b} \right\}$.

Or, en faisant correspondre les notations, on a $X = \alpha$ et $Y = a - \beta$.

On a alors $\frac{nX}{b} = \left\lfloor \frac{n\alpha}{b} \right\rfloor + \theta \left(\frac{n\alpha}{b} \right)$ et $\frac{nY}{a} = \frac{n(a-\beta)}{a} = n - \frac{n\beta}{a} = n - \left\lfloor \frac{n\beta}{a} \right\rfloor - \theta \left(\frac{n\beta}{a} \right)$.

Et donc l'équivalence :

$$\frac{nY}{a} \leq \ell \leq \frac{nX}{b} \iff n - \left\lfloor \frac{n\beta}{a} \right\rfloor \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{n\alpha}{b} \right\rfloor$$

car les nombres $\theta \left(\frac{n\alpha}{b} \right) \in [0, 1[$ et $-\theta \left(\frac{n\beta}{a} \right) \in] - 1, 0]$.

Donc

$$D_n = \left\lfloor \frac{n\alpha}{b} \right\rfloor - \left(n - \left\lfloor \frac{n\beta}{a} \right\rfloor \right) + 1$$

On remplace les parties entières :

$$D_n = \frac{n\alpha}{b} - \theta \left(\frac{n\alpha}{b} \right) - n + \frac{n\beta}{a} - \theta \left(\frac{n\beta}{a} \right) + 1$$

$$D_n = \frac{n\alpha a + n\beta b - nab}{ab} - \theta \left(\frac{n\alpha}{b} \right) - \theta \left(\frac{n\beta}{a} \right) + 1$$

Et comme $n\alpha a + n\beta b - nab = n(\alpha a - (a - \beta)b) = n \times 1 = n$, on en déduit :

$$\boxed{D_n = \frac{n}{ab} + 1 - \theta \left(\frac{\alpha n}{b} \right) - \theta \left(\frac{\beta n}{a} \right) \quad \text{formule de POPOVICIU}}$$

(e) i. Faisons la division euclidienne de αa par b :

$$\alpha a = kb + r \implies \frac{\alpha a}{b} = k + \frac{r}{b}$$

Or $k \in \mathbb{Z}$ et $\frac{r}{b} \in \left[0, \frac{b}{b} \right[= [0, 1[$, alors $\left\lfloor \frac{\alpha a}{b} \right\rfloor = k$, puis

$$\boxed{\theta \left(\frac{\alpha n}{b} \right) = \frac{r}{b}}$$

$$\boxed{\text{De même } \theta \left(\frac{\beta n}{a} \right) = \frac{r'}{a}, \text{ où } r' \text{ est le reste de la division de } \beta n \text{ par } a}$$

ii. On a ici $n = 1777$, $a = 2$, $b = 5$.

Comme $3 \times 2 + (-1) \times 5 = 6 - 5 = 1$, on doit prendre $\alpha = 3$ et $\beta \equiv -1[2]$ donc $\beta = 1$.

$$\text{On vérifie bien } \begin{cases} \alpha a = 6 \equiv 1 & [5] \\ \beta b = 5 \equiv 1 & [2] \end{cases}.$$

On cherche donc à décomposer 1777 (année de naissance du grand GAUSS) :

$$D_{1777} = \frac{1777}{10} + 1 - \theta \left(\frac{3 \times 1777}{5} \right) - \theta \left(\frac{1 \times 1777}{2} \right) = \frac{1777}{10} + 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1777 + 10 - 2 - 5}{10} = 178$$

car $1777 \equiv 1[2]$ (nombre impair) et $3 \times 1777 \equiv 1[5]$.

Il y a 178 façons peut obtenir la somme de 1777 euros avec des pièces de 2 et des billets de 5 ?

On commencera par déterminer α et β . Pourquoi 1777 ?

iii. Le calcul simple suivant donne : $X^{2k} \times X^{5p} = X^{2k+5p}$.

Si on note λ_n , le coefficient de X^n dans le polynôme $\left(\sum_{k=0}^n X^{2k} \right) \times \left(\sum_{p=0}^n X^{5p} \right)$, alors λ_n

est le nombre de fois, où l'on a $2k + 5p = n$.

$$\lambda_n = \sum_{\substack{2k+5p=n, \\ k,p \in \mathbb{N}}} 1 = D_n$$

le coefficient de X^n dans le polynôme $\left(\sum_{k=0}^n X^{2k} \right) \times \left(\sum_{p=0}^n X^{5p} \right)$ est D_n