

Devoir à la maison n°8

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**.

Exercice - Une formule de Legendre

Soient $n \geq 1$ et p un nombre premier. On se propose de calculer $m = v_p(n!)$.

On suppose que n s'écrit en base p ,

$$n = a_r p^r + a_{r-1} p^{r-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad a_r \neq 0, \quad a_r, a_{r-1}, \dots, a_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$$

1. Soit $k \in \{0, 1, \dots, r\}$. Quel (double) calcul faire pour obtenir la valeur de a_k , sans calculer les autres valeurs ?
2. Démontrer la formule suivante :

$$m = \sum_{k=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

3. Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Calculer $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ en fonction des chiffres a_i .
4. En déduire la formule de Legendre :

$$m = \frac{n - S}{p - 1}, \quad S := \sum_{k=0}^r a_k$$

5. Calculer m lorsque $n = 1\,000$ et $p = 2$.

Problème - Système de congruence

I. Lemme chinois

1. Soient a, b deux entiers positifs premiers entre eux, et soient $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$.
On considère le système de congruences :

$$(S) \begin{cases} n \equiv r_1 & [a] \\ n \equiv r_2 & [b] \end{cases}$$

- (a) Justifier l'existence de deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
 - (b) Soit $r_0 = aur_2 + bvr_1$. Montrer que r_0 est une solution de (S) .
 - (c) En déduire que les solutions de (S) sont les entiers n tels que $n \equiv r_0 [ab]$.
2. Application. Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de n pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui-ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

II. Dénomérants

Dans toute cette partie, pour x réel, on désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x .

1. Dans cette question on cherche à résoudre l'équation $(E) : 2x + 5y = 2018$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
 - (a) Trouver un couple de solutions $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}^2$.
 - (b) Montrer qu'un couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie (E)
si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 5k$ et $y = y_0 - 2k$
 - (c) En déduire le nombre de solutions de (E) dans $\mathbb{N}^2$.

Dorénavant, a et b désignent deux entiers naturels non nuls.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, D_n le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ax + by = n$.

2. Une presque-formule.

- (a) Calculer D_0 .
- (b) Déterminer D_n lorsque $a \wedge b$ ne divise pas n .
- (c) On suppose maintenant que $a \wedge b = 1$.
 - i. Montrer qu'il existe $(X, Y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $aX - bY = 1$.
 - ii. Montrer que D_n est le nombre d'entiers $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{nY}{a} \leq \ell \leq \frac{nX}{b}$.
 - iii. Soient x et y des réels, montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor + \epsilon$ avec $\epsilon \in \{0, -1\}$
 - iv. En déduire que $D_n \in \{\lfloor \frac{n}{ab} \rfloor; \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor + 1\}$. Vérifier votre réponse à la question 1.(c).

Désormais, on suppose que $a > b \geq 2$ désignent deux entiers premiers entre eux.

3. La formule de POPOVICIU.

- (a) A l'aide du théorème de Bézout, montrer qu'il existe deux entiers $\alpha \in [1; b-1]$ et $\beta \in [1; a-1]$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha a \equiv 1 & [b] \\ \beta b \equiv 1 & [a] \end{cases}$$

Démontrer que α et β sont uniques.

- (b) On note γ l'entier tel que $\alpha a = 1 - \gamma b$.
Montrer que $\gamma \in [1 - a; -1]$.
- (c) En déduire que $\alpha a - (a - \beta)b = 1$.
- (d) Conclure que :

$$D_n = \frac{n}{ab} + 1 - \theta\left(\frac{\alpha n}{b}\right) - \theta\left(\frac{\beta n}{a}\right) \quad \text{formule de POPOVICIU}$$

où $\theta(u) = u - \lfloor u \rfloor$ désigne la partie décimale d'un réel u .

- (e) i. Montrer que $\theta\left(\frac{\alpha n}{b}\right) = \frac{r}{b}$ où r est le reste de la division de αn par b .
Que dire de $\theta\left(\frac{\beta n}{a}\right)$?
- ii. Application numérique : de combien de façons peut obtenir la somme de 1777 euros avec des pièces de 2 et des billets de 5 ?
On commencera par déterminer α et β . Pourquoi 1777 ?
- iii. Quel est le coefficient de X^n dans le polynôme $\left(\sum_{k=0}^n X^{2k}\right) \times \left(\sum_{p=0}^n X^{5p}\right)$?