Devoir à la maison n°9
CORRECTION

A - Questions préliminaires

1. Cela est indépendant du corps ici.
   Notons $T = P - Q$, alors pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, $T(k) = P(k) - Q(k) = 0$.
   Donc T admet une infinité de racines, donc $T = 0$.

$$\boxed{P = Q}$$

2. f est de classe $\mathcal{C}^2$, donc f'' est continue.
   f'' ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$, donc est de signe constant sur $]0, \frac{1}{2}[$. On notera $\mathcal{H}_+$, l'hypothèse où $f''_{]0,\frac{1}{2}[} > 0$ et $\mathcal{H}_-$ l'hypothèse contraire.
   De même, f'' ne s'annule pas sur $]\frac{1}{2}, 1[$, donc est de signe constant sur $]\frac{1}{2}, 1[$.
   On sait par ailleurs, que f'' s'annule, sur $]0, 1[$, uniquement au point $\frac{1}{2}$, et qu'elle change de signe en $\frac{1}{2}$.
   Donc sous l'hypothèse $\mathcal{H}_+$, f'' est négative sur $]\frac{1}{2}, 1[$
   et sous l'hypothèse $\mathcal{H}_-$, f'' est positive sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

   Par ailleurs, on suppose de plus que $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0$.
   On peut donc appliquer deux fois le théorème de Rolle : il existe $x_1 \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f'(x_1) = 0$
   et il existe $x_2 \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $f'(x_2) = 0$.
   On obtient les tableaux de variations suivants, selon les hypothèses $\mathcal{H}$

Hypothèse $\mathcal{H}_+$

x	0		x_1		$\frac{1}{2}$		x_2		1
f''			$+$		0		$-$		
f'		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	
		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0

Hypothèse $\mathcal{H}_-$

x	0		x_1		$\frac{1}{2}$		x_2		1
f''			$-$		0		$+$		
f'		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	0

Dans tous, les cas, f s'annule, sur $]0, 1[$, uniquement en $\frac{1}{2}$;
elle change de signe en $\frac{1}{2}$ et f et f'' sont toujours de signe opposé.

B - Les polynômes de Bernoulli

On fixe, dans cette partie, un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$, on définit le polynôme $\Delta(P) = P(X) - P(X - 1)$.
   (a) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ et $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$,

$$\Delta(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q)(X)-(\lambda P+\mu Q)(X+1) = \lambda P(X)+\mu Q(X)-\lambda P(X-1)-\mu Q(X-1) = \lambda\Delta(P)+\mu\Delta(Q)$$

   Par ailleurs, notons que si $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$, alors $\Delta(P) = P(X) - P(X - 1)$ est également un polynôme, à coefficients rationnels, et de degré $\leqslant n + 1$.

$$\boxed{\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}_{n+1}[X]).}$$

   (b) Soit $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$ un polynôme de degré $d \in [\![0, n + 1]\!]$ et de coefficient dominant $\alpha \neq 0$.
   Par composition, $\deg P(X + 1) = \deg P \times \deg(X + 1) = \deg P = d$. Donc $\deg(\Delta(P)) \leqslant d$
   • Supposons que $d > 0$.
   Par ailleurs, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors en appliquant le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} P(X+1) &= a_d(X+1)^d + a_{d-1}(X+1)^{d-1} + \cdots + a_0 \\ &= a_dX^d + da_dX^{d-1} + a_{d-1}X^{d-1} + \underbrace{(\frac{d(d-1)}{2}a_d + (d-1)a_{d-1} + a_{d-2})X^{d-2} + \cdots + (a_d \cdots + a_0)}_{=Q_{d-2}\in\mathbb{Q}_{d-2}[X]} \end{aligned}$$

Et donc $[\Delta(P)]_d = [P]_d - [P(X+1)]_d = a_d - a_d = 0$,

et $[\Delta(P)]_{d-1} = a_{d-1} - (da_d - a_{d-1}) = da_d \neq 0$ car $a_d \neq 0$ puisque $\deg P = d$.

• Supposons que $\deg P = 0$, i.e. P est un polynôme constant égal à α.
Alors $P(X-1) = \alpha = P$, donc $\Delta P = 0$ et $\deg(\Delta(P)) = -\infty$.

$\boxed{\text{Donc si } d > 0,\ \deg(\Delta(P)) = d-1 \text{ et sont coefficient dominant est } da_d = d\alpha = d[P]_d \,;\ \text{si } d = 0,\ \delta(P) = 0.}$

(c) Soit $P \in \text{Ker } \Delta$, alors $P(X) = P(X-1)$.
Notons $T = P - P(0)$, alors $T(0) = P(0) - P(0) = 0$.
On a ensuite, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $T(n+1) - T(n) = P(n+1) - P(0) - P(n) + P(0) = P(n+1) - P(n) = 0$ car $P(X) - P(X-1) = 0$.

Donc $(T(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à sa première valeur $T(0) = 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(n) = 0$. T admet une infinité de racines donc $T = 0$.
Et par conséquent, $P = P(0)$ est un polynôme constant.
Réciproquement, à la question précédente, on a vu que si P est constant, $\delta(P) = 0$, donc $P \in \text{Ker } \Delta$.

$$\boxed{\text{Ker } \Delta = \mathbb{K}_0[X] \text{ (ensemble des polynômes constants (ou nul)).}}$$

(d) Il est plus simple d'exploiter ici le théorème du rang.
On a vu que $\text{Im } \Delta = \Delta(\mathbb{Q}_{n+1}[X]) \subset \mathbb{Q}_n[X]$, d'après la question (b).

Puis, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im } \Delta) = \text{rang } (\Delta) = \dim(\mathbb{Q}_{n+1}[X]) - \dim \text{Ker } \Delta = (n+2) - 1 = n+1 = \dim \mathbb{Q}_n[X]$$

Deux espaces de même dimension, dont l'un est inclus dans l'autre sont égaux :

$$\boxed{\text{Im } \Delta = \mathbb{Q}_n[X].}$$

(e) Soit $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$. Supposons que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$. Alors

$$P'(X-1) = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k (X-1)^{k-1}$$

Et par linéarité de la dérivation :

$$[P(X-1)]' = \left[\sum_{k=0}^{n+1} a_k (X-1)^k\right]' = \sum_{k=0}^{n+1} \left[a_k (X-1)^k\right]' = \sum_{k=1}^{n+1} \left[k a_k (X-1)^{k-1}\right]$$

Donc les applications $P \mapsto P'$ et $P \mapsto P(X-1)$ commutent (et sont linéaires).
On en déduit que

$\boxed{\text{pour tout polynôme } P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X],\ \Delta(P') = P'(X) - P'(X-1) = P'(X) - (P(X-1))' = [\Delta(P)]'.}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme.

• Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} i^n$.

Alors $P(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{0} i^n = 0^n = 0$.

Et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$, $P(k) - P(k-1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} i^n - \sum_{i=0}^{k-2} i^n = (k-1)^n$.

Notons $T = (X-1)^n$, on a donc pour $k \geqslant 2$, $(\Delta(P) - T)(k) = P(k) - P(k-1) - T(k) = 0$.

Donc le polynôme $\Delta P - T$ admet une infinité de racines, ainsi : $\Delta(P) = T$.

• Réciproquement, supposons que $\Delta(P) = T$ et $P(1) = 0$.
On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(P)(k) = P(k) - P(k-1) = T(k) = (k-1)^n$.
Puis par télescopage, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$:

$$P(k) = P(k) - \underbrace{P(1)}_{=0} = \sum_{i=1}^{k-1} P(i+1) - P(i) = \sum_{i=1}^{k-1} T(i+1) = \sum_{i=1}^{k-1} i^n = \sum_{i=0}^{k-1} i^n$$

Le résultat est également vrai pour $k = 1$.

$$\boxed{[\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ P(k) = \sum_{i=0}^{k-1} i^n] \iff [\Delta(P) = (X-1)^n \text{ et } P(1) = 0].}$$

(b) On va commencer par caractériser les antécédents de T par Δ. On a vu que $\text{Im }(\Delta) = \mathbb{Q}_n[X]$ et $T = (X-1)^n \in \mathbb{Q}_n[X] = \text{Im }\Delta$.

Donc T admet un antécédent par Δ dans $\mathbb{Q}_n[X]$. Notons P_0 cet antécédent.

On a ensuite les équivalences, pour $P \in \mathbb{Q}[X]$:

$$\Delta(P) = T(= \Delta(P_0)) \iff \Delta(P - P_0) = T - T = 0 \iff P - P_0 \in \text{Ker }\Delta = \mathbb{K}$$
$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } P = P_0 + \lambda$$

Pour obtenir $P(1) = 0$, on doit nécessairement prendre $\lambda = -P_0(1) \in \mathbb{K}$, ce qui donne une unique solution $P_0 - P_0(1)$,

et réciproquement, on trouve bien $P(1) = P_0(1) - P_0(1) = 0$ et $\Delta(P) = T$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme } P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X] \text{ qui vérifie ces propositions équivalentes.}}$$

On le notera désormais Q_n.

(c) Si $d = \deg Q_n > 0$, on a vu que $\deg \Delta(Q_n) = d - 1 = \deg T = n$, donc $d = n+1$.
On a vu ensuite que le coefficient dominant de $\Delta(Q_n)$ est $(n+1)[Q_n]_{n+1} = [T]_n = 1$

$$\boxed{\text{Le terme dominant de } Q_n \text{ est donc } \frac{1}{n+1}X^{n+1}.}$$

(Comme pour une primitive d'un polynôme de degré n, unitaire...).

(d) Par construction $Q_n(1) = 0$ et par ailleurs,

$$0 = (1-1)^n = T(1) = \Delta(Q_n)(1) = Q_n(1) - Q_n(0)$$

$$\boxed{\text{Donc } Q_n(0) = Q_n(1) = 0.}$$

(e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} i^1 = \frac{k(k-1)}{2} = Q_1(k)$. Par unicité : $Q_1 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} i^2 = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} = Q_2(k)$. Par unicité : $Q_2 = \dfrac{X(X-1)(2X-1)}{6}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} i^3 = \frac{k^2(k-1)^2}{4} = Q_1(k)$. Par unicité : $Q_3 = \dfrac{X^2(X-1)^2}{4}$.

$$\boxed{Q_1 = \frac{X(X-1)}{2} \qquad Q_2 = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6} \qquad Q_3 = \frac{X^2(X-1)^2}{4}}$$

(f) $\dfrac{1}{Q_2} = \dfrac{6}{X(X-1)(2X-1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{2X-1}$.

Ce ne sont que des pôles simples. Avec les formules vues dans le cours :

$a = \left[\dfrac{6}{(X-1)(2X-1)}\right]_{.}^{0} = 6$, $b = \left[\dfrac{6}{X(2X-1)}\right]_{.}^{1} = 6$ $c = \left[\dfrac{6}{X(X-1)}\right]_{.}^{\frac{1}{2}} = -24$.

$\dfrac{1}{Q_3} = \dfrac{4}{X^2(X-1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{d}{(X-1)^2}$.

Avec les formules vues dans le cours :

$b = \left[\dfrac{4}{(X-1)^2}\right]_{.}^{0} = 4$ $d = \left[\dfrac{4}{X^2}\right]_{.}^{1} = 4$.

Puis, en faisant $\dfrac{x}{Q_3(x)} = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{cx}{x-1} + \dfrac{dx}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a + c = 0$, par unicité.

Enfin, en faisant $\dfrac{x^2}{Q_3(x)} = ax + b + c\dfrac{x^2-1+1}{x-1} + \dfrac{dx^2}{(x-1)^2} = ax + b + c(x+1) + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{dx^2}{(x-1)^2} = \underbrace{(a+c)}_{=0}x + b + c + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{dx^2}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} b + c + d = 0$, par unicité.

Ainsi $c = -8$ et $a = 8$

$$\boxed{\frac{1}{Q_2} = \frac{6}{X} + \frac{6}{X-1} - \frac{24}{2X-1} \qquad \frac{1}{Q_3} = \frac{8}{X} + \frac{4}{X^2} - \frac{8}{X-1} + \frac{4}{(X-1)^2}}$$

(On peut vérifier en substituant en -1 : $\frac{1}{Q_3}(-1) = 1 = -8 + 4 + 4 + 1$)

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

(a) On a vu qu'on pouvait permuter Δ et la dérivation ; et par linéarité de Δ :

$$\boxed{\Delta(Q_n' - nQ_{n-1}) = \Delta(Q_n)' - n\Delta(Q_{n-1}) = [(X-1)^n]' - n(X-1)^{n-1} = 0}$$

(b) Donc $Q_n' - nQ_{n-1} \in \text{Ker }\Delta$, donc il existe une constante $a_n \in \mathbb{Q}$ tel que $Q_n' - nQ_{n-1} = -a_n$.

$$\boxed{\text{Il existe un nombre rationnel } a_n \text{ tel que } Q_n' + a_n = nQ_{n-1}.}$$

4. Si on dérive cette relation, on trouve donc $Q_n'' + 0 = nQ_{n-1}'$.
On a ainsi défini une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes telle que :

$$Q_1 = \frac{X(X-1)}{2} \qquad \text{et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} Q_{n+1}'' = (n+1)Q_n' \\ Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(1) = 0 \end{cases}$$

Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite de polynômes vérifiant la même propriété.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: « $R_n = Q_n$ ».
— On a $R_1 = Q_1 = \dfrac{X(X-1)}{2}$, par définition.
— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ vraie.
Alors $R_n = Q_n$ et donc $R_n' = Q_n'$.
Ainsi $R_{n+1}'' = (n+1)R_n' = (n+1)Q_n' = Q_{n+1}''$.
Il existe donc deux constantes a et b tel que $R_{n+1} = Q_{n+1} + aX + b$.
Mais par ailleurs, $R_{n+1}(0) = 0 = Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(0) + a\times 0 + b$, donc $b = 0$ nécessairement.
et $R_{n+1}(1) = 0 = Q_{n+1}(1) = Q_{n+1}(1) + a \times 1 + b$ donc nécessairement $a = 0$.
Ainsi, $R_{n+1} = Q_{n+1}$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Il n'existe qu'une unique suite de polynômes définie par la relation précédente.
C'est (Q_n) définie, par ailleurs. On a ainsi, une nouvelle propriété caractéristique de (Q_n)

C - Les nombres de Bernoulli

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tilde{Q_n} = Q_n(1-X)$ (*composition*).

(a)

$$\boxed{\tilde{Q_1} = \frac{(1-X)(-X)}{2} = Q_1 \qquad \tilde{Q_2} = \frac{(1-X)(-X)(2-2X-1)}{2} = -Q_2 \qquad \tilde{Q_3} = \frac{(1-X)^2(-X)^2}{4} = Q_3}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta(\tilde{Q_n}) = \tilde{Q_n}(X) - \tilde{Q_n}(X-1) = Q_n(1-X) - Q_n(1-(X-1)) = Q_n(1-X) - Q_n(2-X)$$

Or on sait que $\Delta(Q_n) = Q(X) - Q(X-1) = (X-1)^{n+1}$, donc en composant à droite avec $2-X$, on trouve :

$$Q_n(2-X) - Q_n(2-X-1) = Q_n(2-X) - Q_n(1-X) = ((2-X)-1)^{n+1} = (1-X)^{n+1} = (-1)^{n+1}(X-1)^{n+1}$$

On a donc

$$\Delta(\tilde{Q_n}) = (-1)^{n+1}\Delta(Q_n) \Longrightarrow \Delta(\tilde{Q_n} - (-1)^{n+1}Q_n) = 0 \Longrightarrow \tilde{Q_n} - (-1)^{n+1}Q_n \in \text{Ker }\Delta$$

Ainsi, il existe une constante $c_n \in \mathbb{Q}$ tel que $\tilde{Q_n} - (-1)^{n+1}Q_n = c_n$.
Or, en 0 : $Q_n(0) = 0$ et $\tilde{Q_n}(0) = Q_n(1-0) = Q_n(1) = 0$ d'après la relation en B.4.
Ainsi $c_n = 0$.

$$\boxed{\tilde{Q_n} = (-1)^{n+1}Q_n.}$$

(c) Donc pour $n = 2p$, nombre pair, en substituant en $\frac{1}{2}$:

$$Q_n\left(\frac{1}{2}\right) = Q_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \tilde{Q_n}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{2p+1}Q_n\left(\frac{1}{2}\right) = -Q_n\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow Q_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

En dérivant la relation de la question précédente : $\tilde{Q_n}' = (-1)^{n+1}Q_n'$, puis pour $n = 2p+1$, nombre impair, en substituant en $\frac{1}{2}$:

$$Q_{n+1}'\left(\frac{1}{2}\right) = Q_{n+1}'\left(1 - \frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+2}\tilde{Q_{n+1}}'\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{2p+3}Q_{n+1}'\left(\frac{1}{2}\right) = -Q_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow Q_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Enfin, avec les notations de B.3.(b), en substituant en $\frac{1}{2}$, dans un second temps :

$$a_{2p+1} = nQ_{2p} - Q_{2p+1}' \Longrightarrow a_{2p+1} = n \times 0 - 0 = 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N},\ Q_{2p}(\tfrac{1}{2}) = 0,\ Q_{2p+1}'(\tfrac{1}{2}) = 0, \text{ et } a_{2p+1} = 0.}$$

(d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, avec les relations B.4 et B.3.(b) :

$$\boxed{\begin{array}{c} Q''_{2p+2} = (2p+2)Q'_{2p+1} = (2p+2)[(2p+1)Q_{2p} - a_{2p+1}] = (2p+2) \times (2p+1) \times Q_{2p} \\ Q''_{2p+1} = (2p+1)Q'_{2p} = (2p+1)[(2p)Q_{2p-1} - a_{2p}] = (2p+1) \times 2p \times Q_{2p-1} - (2p+1) \times a_{2p} \end{array}}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée au polynôme Q_n.
Notons qu'on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_n^{(k)}$ est la fonction polynomiale associée au polynôme $Q_n^{(k)}$

(a) On va montrer le résultat par récurrence, en exploitant les formules précédentes et la première partie du devoir.
Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_p$: « sur $[0,1]$, q_{2p} ne s'annule qu'en 0, $\frac{1}{2}$ et 1, et change de signe en $\frac{1}{2}$. Précisément, son signe sur $]0, \frac{1}{2}[$ est celui de $(-1)^{p+1}$. »

— $q_2 : x \mapsto \dfrac{x(x-1)(2x-1)}{6}$.
On reconnait une fonction (polynomiale) qui a pour racine 0, 1 et $\frac{1}{2}$.
Toutes ses racines sont simples (donc d'un ordre impair), la fonction change de signe au voisinage de chacun de ces points.
Enfin, sur $]0, \frac{1}{2}[$, q_2 est positive (comme produit d'un nombre positif et deux nombres négatifs), donc du signe de $(-1)^2$
Par conséquent $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{P}_{2p}$ est vraie.
On a $q''_{2p+2} = (2p+2) \times (2p+1) \times q_{2p}$, d'après la question précédente.
Donc comme $\mathcal{P}_{2p}$ est vraie, q_{2p} et donc q''_{2p+2} ne s'annulent qu'en 0, $\frac{1}{2}$ et 1, et change de signe en $\frac{1}{2}$ ($(2p+2)(2p+1) > 0$).
On se trouve donc dans les hypothèses de la partie A.2. pour q_{2p+2}.
On peut donc reprendre la conclusion : q_{2p+2} s'annule sur $]0, 1[$ uniquement en $\frac{1}{2}$ où elle change de signe.
Celui de q_{2p+2} est l'opposé de celui de q''_{2p+2}, lui même égal à celui de q_{2p} égal à celui de $(-1)^{p+1}$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.
Donc le signe de q_{2p+2} sur $[0, \frac{1}{2}]$ est celui de $(-1)^{p+1}$.
Enfin, on a vu que $q_{2p+2}(0) = q_{2p+2}(1) = 0$ (en B.2.(d). Donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Sur le segment } [0,1], \text{ la fonction } q_{2p} \text{ ne s'annule qu'en } 0, \tfrac{1}{2} \text{ et } 1, \text{ et change de signe en } \tfrac{1}{2}. \\ \text{Le signe de } q_{2p} \text{ sur }]0, \tfrac{1}{2}[\text{ est celui de } (-1)^{p+1}. \end{array}}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. En B.3, on a vu que $Q'_{2p+1} + a_{2p+1} = (2p+1)Q_{2p}$ et en C.1.(c) que $a_{2p+1} = 0$.
Donc sur $[0,1]$, $q'_{2p+1} = (2p+1)q_{2p}$.
D'après la question précédente,
ou bien q_{2p+1} est donc croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ si p impair.
ou bien q_{2p+1} est donc décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ si p pair.
Mais comme $q_{2p+1}(0) = q_{2p+1}(1) = 0$, q_{2p+1} ne change pas de signe sur $[0,1]$. Précisément :

$$\boxed{\text{la fonction } q_{2p+1} \text{ est de signe constant sur l'intervalle ouvert }]0,1[, \text{ celui de } (-1)^{p+1}.}$$

Ceci est vrai aussi pour $q_1 : x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}$.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Par définition, $a_{2p} = 2pQ_{2p-1} - Q'_{2p}$.
En substituant en x_1 qui annule Q'_{2p} (cf. A.2.), on a $a_{2p} = 2pQ_{2p-1}(x_1) - Q'_{2p}(x_1) = 2pQ_{2p-1}(x_1)$.
Or $Q_{2p-1}(x_1)$ est du signe de $(-1)^p$

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \ a_{2p} \text{ n'est pas nul et qu'il est du signe de } (-1)^p.}$$

3. On sait que $a_n = nQ_{n-1} - Q'_n$ Et donc,

$$n\int_0^1 Q_{n-1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (a_n + Q'_n(t))\,\mathrm{d}t = [a_n t + Q_n(t)]_0^1 = a_n + Q_n(1) - Q_n(0) = a_n$$

On a

$$B_1 = (-1)^1 a_2 = -2\int_0^1 q_1(t)\mathrm{d}t = -\int_0^1 x(x-1)\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$B_2 = (-1)^2 a_4 = 4\int_0^1 q_3(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 x^2(x-1)^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{30}$$

$$B_3=(-1)^3a_6=-6\int_0^1 q_5(t)\mathrm{d}t=-\int_0^1 x(x-1)\mathrm{d}x=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

$$\boxed{B_1=\frac{1}{6}\qquad B_2=\frac{1}{30}\qquad B_3=\frac{1}{6}}$$

D - Une méthode d'approximation des intégrales

Parmi les propriétés de (Q_n) et (B_n), on utilisera uniquement les suivantes :

— $Q_1=\dfrac{X(X-1)}{2}$

— Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Q'_{2n+2}+(-1)^{n+1}B_{n+1}=(2n+2)Q_{2n+1}$;

— Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Q''_{2n}+(2n+1)(-1)^nB_n=(2n+1)(2n)Q_{2n-1}$;

— Pour tout $n\in\mathbb{N}*$, $Q_{2n+1}(0)=Q_{2n+1}(1)=Q'_{2n+1}(0)=Q'_{2n+1}(1)=0$;

— Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction polynomiale q_{2n+1} est de signe constant sur $[0,1]$

1. On applique une première intégration par parties en posant $u=Q_1$ et $v=f^{(2)}$, de classes $\mathcal{C}^1$

$$\int_0^1 Q_1(x)f^{(3)}(x)\mathrm{d}x=\Big[Q_1(x)f^{(2)}\Big]_0^1-\int_0^1 Q_1'(x)f^{(2)}\mathrm{d}x=-\int_0^1 Q_1'(x)f^{(2)}\mathrm{d}x$$

car $Q_1(0)=Q_1(1)=0$. On applique une seconde intégration par parties en posant $u=Q_1'$ et $v=f^{(1)}$, de classes $\mathcal{C}^1$

$$\int_0^1 Q_1(x)f^{(3)}(x)\mathrm{d}x=-\left[Q_1'(x)f'(x)\right]_0^1+\int_0^1 Q_1''f'(x)\mathrm{d}x$$

Or $Q_1'=X-\frac{1}{2}$ et $Q_1''=1$. Donc

$$\boxed{\int_0^1 Q_1(x)f^{(3)}(x)\mathrm{d}x=-\frac{f'(1)+f'(0)}{2}+f(1)-f(0)}$$

2. Soit n un entier naturel et f une fonction $2n+3$ fois continuement dérivable sur le segment $[0,1]$.

(a) Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$\mathcal{P}_n$: « Si $f\in\mathcal{C}^{2n+3}$, alors $f(1)-f(0)=\dfrac{f'(0)+f'(1)}{2}+\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^pB_p}{(2p)!}\Big[f^{(2p)}(1)-f^{(2p)}(0)\Big]+$ R_n avec $R_n=\dfrac{1}{(2n+1)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+1}(x)f^{(2n+3)}(x)\mathrm{d}x$. »

— La question précédente démontre que $\mathcal{P}_0$ est bien vraie (avec une somme vide).

— Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soit $f\in\mathcal{C}^{2n+5}$, on a donc $f\in\mathcal{C}^{2n+3}$ et on peut appliquer $\mathcal{P}_n$ à f.
Donc $f(1)-f(0)=\dfrac{f'(0)+f'(1)}{2}+\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^pB_p}{(2p)!}\Big[f^{(2p)}(1)-f^{(2p)}(0)\Big]+R_n$

avec $R_n=\dfrac{1}{(2n+1)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+1}(x)f^{(2n+3)}(x)\mathrm{d}x$.

On sait, par ailleurs, que $(2n+2)Q_{2n+1}=Q'_{2n+2}+(-1)^{n+1}B_{n+1}$, on a donc

$$\begin{aligned}(2n+2)!\times R_n&=\int_0^1\Big(Q'_{2n+2}(x)f^{(2n+3)}(x)+(-1)^{n+1}B_{n+1}f^{(2n+3)}(x)\Big)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 Q'_{2n+2}(x)f^{(2n+3)}(x)\mathrm{d}x+(-1)^{n+1}B_{n+1}\int_0^1 f^{(2n+3)}(x)\mathrm{d}x\\&=\Big[Q_{2n+2}(x)f^{(2n+3)}(x)\Big]_0^1-\int_0^1 Q_{2n+2}(x)f^{(2n+4)}(x)\mathrm{d}x+(-1)^{n+1}B_{n+1}\Big[f^{(2n+2)}(x)\Big]_0^1\\&=-\int_0^1 Q_{2n+2}(x)f^{(2n+4)}(x)\mathrm{d}x+(-1)^{n+1}B_{n+1}\Big(f^{(2n+2)}(1)-f^{(2n+2)}(0)\Big)\end{aligned}$$

où on a fait une intégration par parties avec $u=f^{(2n+3)}$ et $v=Q_{2n+2}(x)\in\mathcal{C}^1([0,1])$, et noter que $Q_{2n+2}(1)=Q_{2n+2}(0)=0$ (d'après B.4.)
Comme $(2n+3)Q_{2n+2}=Q'_{2n+3}+a_{2n+3}$ (B.3.) et que $a_{2n+3}=0$, on a :

$$\begin{aligned}(2n+3)\int_0^1 Q_{2n+2}(x)f^{(2n+4)}(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 Q_{2n+3}(x)'f^{(2n+4)}(x)\mathrm{d}x\\&=\Big[Q_{2n+3}(x)f^{(2n+4)}(x)\Big]_0^1-\int_0^1 Q_{2n+3}(x)f^{(2n+5)}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1 Q_{2n+3}(x)f^{(2n+5)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

où on a refait une nouvelle intégration par parties, avec $u = f^{(2n+4)}$ et $v = Q_{2n+3}(x) \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et noter que $Q_{2n+3}(1) = Q_{2n+3}(0) = 0$ (d'après B.4.)
Finalement :

$$R_n = \frac{1}{(2n+3)((2n+2)!)} \int_0^1 Q_{2n+3}(x) f^{(2n+5)}(x)\mathrm{d}x + \frac{(-1)^{n+1}B_{n+1}}{(2(n+1))!}\left(f^{(2(n+1))}(1) - f^{(2(n+1))}(0)\right)$$

Ainsi, on a $f(1) - f(0) = \dfrac{f'(0)+f'(1)}{2} + \displaystyle\sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!}\left[f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0)\right] + R_{n+1}$

avec $R_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+3)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+3}(x) f^{(2n+5)}(x)\mathrm{d}x.$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, f \in \mathcal{C}^{2n+3},\ f(1) - f(0) = \dfrac{f'(0)+f'(1)}{2} + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!}\left[f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0)\right] + R_n \\ \text{où le reste } R_n \text{ est égal à l'intégrale : } \dfrac{1}{(2n+1)!}\displaystyle\int_0^1 Q_{2n+1}(x) f^{(2n+3)}(x)\mathrm{d}x. \end{array}}$$

(b) La fonction $f^{(2n+3)}$ est continue par hypothèse, $[0,1]$ est un compact, donc d'après le théorème de Weierstrass, $f^{(2n+3)}([0,1])$ est également un compact. Il est donc majorée (et la borne est atteinte, car il est fermé).

$$\boxed{\text{On peut donc définir } M = \sup_{x\in[0,1]} |f^{(2n+3)}(x)|.}$$

(c) Ensuite :

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 |Q_{2n+1}(x)||f^{(2n+3)}(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{(2n+2)!}\int_0^1 |(2n+2)Q_{2n+1}(x)|\mathrm{d}x$$

Puis, comme Q_{2n+1} est de signe constant égal à celui de $(-1)^{n+1}$ sur $[0,1]$,
on a donc, pour $x \in [0,1]$, $|Q_{2n+1}(x)| = (-1)^{n+1}Q_{2n+1}(x)$. Ainsi

$$|R_n| \leqslant \frac{M}{(2n+2)!}\int_0^1 (-1)^{n+1}(2n+2)Q_{2n+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{M}{(2n+2)!}\int_0^1 (-1)^{n+1}Q'_{2n+2}(x) + B_{n+1}\mathrm{d}x$$

$$\boxed{|R_n| \leqslant \frac{M}{(2n+2)!}\left[(-1)^{n+1}Q_{2n+2}(x)\right]_0^1 + B_{n+1}[x]_0^1 = \frac{B_{n+1}M}{(2n+2)!}}$$

3. Soit g, $2n+2$ fois continuement dérivable sur le segment $[a,b]$ et un entier m supérieur ou égal à 2. Il s'agit de :
   (a) Couper l'intervalle $[a,b]$ en m morceaux de même taille, noté $[a_k, a_{k+1}]$
   (b) Faire un changement de variable affine pour se placer sur $[0,1]$:
   $x \in [a_k, a_{k+1}] \to t \in [0,1]$, en posant $x = a_k + (a_{k+1} - a_k)t$
   (c) Noter G une primitive de g, donc de classe $\mathcal{C}^{2n+3}$ et $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} g(x)\mathrm{d}x = G(a_{k+1}) - G(a_k)$
   (d) Enfin, exploiter la formule précédente.

On note donc pour tout $k \in [\![0,m]\!]$, $a_k = a + \dfrac{k}{m}(b-a)$.
On a donc $a_0 = a$, $a_m = b$ et $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{m}$
mais aussi $[a,b] = \bigcup_{k=0}^{m-1}[a_k, a_{k+1}]$.
On considère également G une primitive de g, on a donc $G \in \mathcal{C}^{2n+3}$ et $G^{(s+1)} = g^{(s)}$.
On notera également par la suite :
$\varphi_k : [0,1] \to [a_k, a_{k+1}]$, $t \mapsto a_k + (a_{k+1} - a_k)t = ta_{k+1} + (1-t)a_k$ qui fait le chemin $[a_k, a_{k+1}]$.
On a alors, d'abord avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m-1} G(a_{k+1}) - G(a_k) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\left((G\circ\varphi_k)(1) - (G\circ\varphi)(0)\right)\end{aligned}$$

Fixons $k \in [\![0, m-1]\!]$ et notons $f = G \circ \varphi_k$.
Montrons par récurrence que $f \in \mathcal{C}^{2n+3}$ et $\forall\, k \leqslant 2n+3$, $f^{(k)} = (a_{k+1} - a_k)^k\, G^{(k)} \circ \varphi_k$.

Posons donc, pour $k \leqslant 2n+3$, $\mathcal{P}_k$: « $f \in \mathcal{C}^k$ et $f^{(k)} = (a_{k+1} - a_k)^k\, G^{(k)} \circ \varphi_k$ ».

Le résultat est vraie pour $k = 0$.

Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour $k \leqslant 2n+2$.

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi que $G^{(k)}$, il en est de même de $f^{(k)}$ ($k \leqslant 2n+2$).

Puis comme $\varphi'(t) = (a_{k+1} - a_k) = \dfrac{b-a}{m}$, on trouve donc que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

On peut donc appliquer la formule trouvée à la question précédente

$$\begin{aligned}
G(a_{k+1}) - G(a_k) &= f(1) - f(0) = \frac{f'(0)+f'(1)}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \left[f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0)\right] + R_{k,n} \\
&= \frac{b-a}{m} \frac{G'(a_k) + G'(a_{k+1})}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \frac{(b-a)^{2p}}{m^{2p}} \left[G^{(2p)}(a_{k+1}) - G^{(2p)}(a_k)\right] + R_{k,n} \\
&= \frac{b-a}{m} \frac{g(a_k) + g(a_{k+1})}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \frac{(b-a)^{2p}}{m^{2p}} \left[g^{(2p-1)}(a_{k+1}) - g^{(2p-1)}(a_k)\right] + R_{k,n}
\end{aligned}$$

avec $|R_{k,n}| \leqslant \dfrac{B_{n+1}}{(2n+2)!} \sup_{x\in[a_k,a_{k+1}]} \left|(G\circ\varphi_k)^{(2n+3)}(x)\right| \leqslant \dfrac{B_{n+1}(b-a)^{2n+3}}{(2n+2)!\,m^{2n+3}} \sup_{x\in[0,1]} \left|g^{(2n+2)}(x)\right| :=$ T En revenant sur la somme générale :

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{b-a}{m} \frac{g(a_k) + g(a_{k+1})}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \frac{(b-a)^{2p}}{m^{2p}} \left[g^{(2p-1)}(a_{k+1}) - g^{(2p-1)}(a_k)\right] + R_{k,n} \right) \\
&= \frac{b-a}{2m} \left(g(a_0) + g(a_1) + g(a_1) + g(a_2) + \cdots + g(a_{m-1}) + g(a_{m-1}) + g(a_m)\right) \\
&\qquad + \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \left(\frac{b-a}{m}\right)^{2p} \sum_{k=0}^{m-1} \left(g^{(2p-1)}(a_{k+1}) - g^{(2p-1)}(a_k)\right) \right) + mT
\end{aligned}$$

Donc, en réécrivant la première somme, et en exploitant un téléscopage à la dernière :

$$\boxed{\begin{gathered}
\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2m} \left[g(a) + g(b) + 2\sum_{k=1}^{m-1} g(a_k)\right] + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \left(\frac{b-a}{m}\right)^{2p} \left[g^{(2p-1)}(b) - g^{(2p-1)}(a)\right] + R'_n \\
\text{avec } |R'_n| \leqslant mT \leqslant \frac{B_{n+1}(b-a)^{2n+3}}{(2n+2)!\,m^{2n+2}} \sup_{[0,1]} \left|g^{(2n+2)}\right|
\end{gathered}}$$